FAM

Entanglement

Christian Ferrari

Liceo di Locarno

Lo **spazio di Hilbert** per modelizzare sistemi a **due particelle** quantistiche è

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

dove $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ descrivono gli stati puri delle particelle 1 e 2.

- *Base*: Se $\mathcal{B}_{\mathcal{H}_1} = \{f_i\}_{i=1}^n$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{H}_2} = \{g_i\}_{i=1}^m$ allora $\{e_k\} = \{f_i \otimes g_j\}$ è una **base ortonormata** di $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ e $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 = nm$.
- *Prodotto scalare*:

$$(\psi_1 \otimes \psi_2, \varphi_1 \otimes \varphi_2)_{\mathcal{H}} = (\psi_1, \varphi_1)_{\mathcal{H}_1} (\psi_2, \varphi_2)_{\mathcal{H}_2}$$

- *Norma*:

$$\|\psi_1 \otimes \psi_2\|_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2} = \|\psi_1\|_{\mathcal{H}_1} \|\psi_2\|_{\mathcal{H}_2}$$

- *Operatori*:

$$A \otimes B(\psi_1 \otimes \psi_2) = A\psi_1 \otimes B\psi_2$$

In generale ogni $\Psi \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ si scrive come

$$\Psi = \sum_{k=0}^{mn} \alpha_k e_k \qquad \text{dove} \qquad e_k \in \mathcal{B}_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2}$$

Due casi:

- Ψ si fattorizza come $\Psi = \psi_1 \otimes \psi_2$: la particella 1 è nello stato ψ_1 e la particella 2 nello stato ψ_2.
- Ψ non è fattorizzabile, per esempio

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 \otimes \psi_2 + \varphi_1 \otimes \varphi_2)$$

la particella 1 è *potenzialmente* negli stati ψ_1 e φ_1 e la particella 2 è *potenzialmente* nelgli stati ψ_2 e φ_2.

Gli **stati** non fattorizzabili sono detti **intrecciati** o **entangled**.

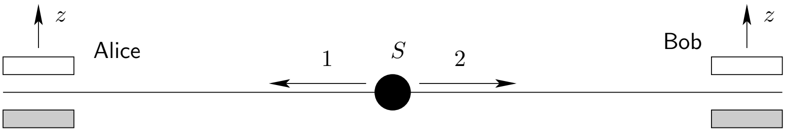
Consideriamo due spin $\frac{1}{2}$: $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$

Stato intrecciato

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+^1 \otimes \psi_-^2 - \psi_-^1 \otimes \psi_+^2)$$

I valori $\pm\frac{\hbar}{2}$ delle osservabili S_z dei due sistemi sono *entrambi delle proprietà potenziali*.

Esperienza



Misura	Risultato Alice	Risultato Bob
1	$+\hbar/2$	$-\hbar/2$
2	$-\hbar/2$	$+\hbar/2$
3	$-\hbar/2$	$+\hbar/2$
4	$+\hbar/2$	$-\hbar/2$
5	$+\hbar/2$	$-\hbar/2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$N-1$	$+\hbar/2$	$-\hbar/2$
N	$+\hbar/2$	$-\hbar/2$

Per ogni coppia di risultati si osserva una perfetta (anti) correlazione: se durante una misura Alice osserva il valore $+\frac{\hbar}{2}$ per il primo spin, allora Bob osserva il valore $-\frac{\hbar}{2}$ per il secondo spin e viceversa.

- Il 50% delle volte Alice ottiene $+\hbar/2$ e Bob $-\hbar/2$, mentre il 50% delle volte Alice ottiene $-\hbar/2$ e Bob $+\hbar/2$:

$$\mathrm{Prob}_\Psi\{S_z \otimes I = \pm\hbar/2; I \otimes S_z = \mp\hbar/2\} = \|P_{\psi^1_\pm} \otimes P_{\psi^2_\mp} \Psi\|^2 = \tfrac{1}{2}$$

- È fondamentale sottolineare che **queste coppie di valori correlati sono aleatorie**, in una singola esperienza è impossibile prevedere con certezza il risultato.

Perché lo stato Ψ prevede queste correlazioni?

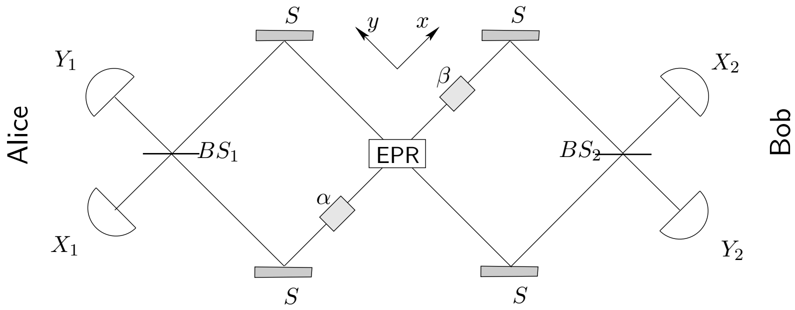
- Ψ rappresenta uno stato di conoscenza assoluta per $S_z \otimes S_z$

$$S_z \otimes S_z \Psi = -\frac{\hbar^2}{4}\Psi$$

- Ciò che implica che Bob deve misurare $+\hbar/2$ se Alice ha misurato $-\hbar/2$ e viceversa.
- È *impossibile* che Alice e Bob misurino entrambi $\pm\hbar/2$.

- Nello stato Ψ la direzione di ogni singolo spin non è definita (conoscenza assoluta), ma è *definita una proprietà della coppia* di spin: l'orientazione. Infatti, gli spin sono orientati nel verso opposto.
- In uno stato intrecciato non sono definite le proprietà di ogni singolo sottosistema, ma **è definita una proprietà della coppia**.
- **È impossibile descrivere la coppia di particelle come due entità separate**.
- **Le due particelle devono interagire alla sorgente per poter essere in uno stato intrecciato**: per esempio

$$\pi^0 \longrightarrow e^+ + e^-$$



La sorgente emette sempre una coppia di particelle alla volta, ed è regolata in modo tale che la *coppia* di particelle successiva non venga emessa prima che la coppia precedente sia giunta ai detettori.

Spazio di Hilbert: $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, stati di propagazione ψ_x e ψ_y.

Stato iniziale:

$$\Psi_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_x^1 \otimes \psi_x^2 + \psi_y^1 \otimes \psi_y^2)$$

Lo stato iniziale è lo stato intrecciato per il quale la proprietà della coppia di essere emessa nella stessa direzione è definita (ma non la direzione di ogni singola particella).

Stato finale:

$$\Psi_{out} = \frac{ie^{i\theta}}{\sqrt{2}} \left[\sin\theta(\psi_x^1 \otimes \psi_x^2 - \psi_y^1 \otimes \psi_y^2) + \cos\theta(\psi_x^1 \otimes \psi_y^2 + \psi_y^1 \otimes \psi_x^2)\right]$$

$\theta = \frac{\alpha+\beta}{2}$

- $\alpha = \beta = 0$, allora

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}\{X_1 = 1; X_2 = 1\} = \mathrm{Prob}\{Y_1 = 1; Y_2 = 1\} &= 0\\ \mathrm{Prob}\{X_1 = 1; Y_2 = 1\} = \mathrm{Prob}\{Y_1 = 1; X_2 = 1\} &= \tfrac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

  Le particelle *di ogni coppia* sono *sempre* detettate nei due detettori opposti: **anticorrelazione perfetta**.

- $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, allora

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}\{X_1 = 1; X_2 = 1\} = \mathrm{Prob}\{Y_1 = 1; Y_2 = 1\} &= \tfrac{1}{2}\\ \mathrm{Prob}\{X_1 = 1; Y_2 = 1\} = \mathrm{Prob}\{Y_1 = 1; X_2 = 1\} &= 0\,.\end{aligned}$$

  Le particelle *di ogni coppia* di ogni sono *sempre* detettate nei due detettori simili: **correlazione perfetta**.

Modificando solo l'interferometro di *una* particella si può passare da una situazione di correlazione perfetta ad una di anticorrelazione perfetta per tutte le *coppie* di particelle.

- **Ogni osservatore misura una sequenza aleatoria, e solo dopo aver confrontato i rispettivi risultati che essi possono stabilire che vi è una correlazione perfetta sui risultati della misura: non vi è nessuna trasmissione istantanea di informazione**.
- **Le due particelle correlate devono essere considerate come un'unica entità**.
- **Le due particelle devono interagire alla sorgente per essere in uno stato intrecciato**.

Possibili origini classiche:

- **Scambio di informazioni**. Ma si sono osservate correlazioni su grandi distanze (1998: $10.9\,\mathrm{km}$) $\Longrightarrow$ Ipotesi da scartare.
- **Stabilite alla sorgente**. Allora ogni particella della coppia "sa" già come dovrà reagire quando incontra un determinato tipo di apparecchio di misura e ciò **indipendentemente** dalle possibili misure effettuate sull'altra particella.

  Teoria locale: le due particelle della coppia sono **indipendenti** fra loro e quindi considerate come **entità separare**.

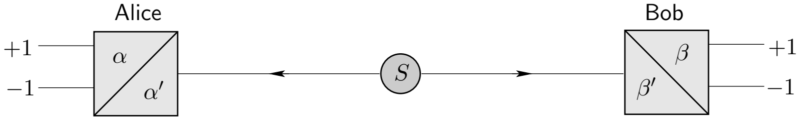
  1964: **Teorema di Bell** $\Longrightarrow$ possibilità di testare le teorie locali (e quindi l'ipotesi)!!!

Il principio delle cause locali

Eventi che occorrono in una regione spaziotemporale data, non possono essere influenzati da una modifica di parametri localizzati in una regione spaziotemporale distante di un intervallo di tipo spazio.

Per esempio se Alice e Bob sono distanti L, rispetto ad un dato sistema di riferimento $\mathcal{R}$ in cui sono entrambi immobili, e che la misura impiega un tempo τ, allora si esige che $\tau \ll L/c$.

Alice può eseguire due misure indicate con α e α', come pure Bob le cui misure sono indicate β, β'. In tutti i casi si hanno solo due possibili risultati $+1$ e -1.



La **località** corrisponde al fatto che a, a' **non** dipendono dalla misura fatta da Bob e b, b' **non** dipendono dalla misura effettuata da Alice.

Teorema
Se la teoria è locale allora

$$S = (a + a')b + (a - a')b'$$

soddisfa

$$|\langle S \rangle| \leq 2 \, .$$

Dimostrazione
Abbiamo $S = \pm 2$, poiché: o $a + a' = 0$ e quindi $a - a' = \pm 2$, oppure $a - a' = 0$ e quindi $a + a' = \pm 2$. Da cui

$$-2 \leq \langle S \rangle \leq +2 \Longrightarrow |\langle S \rangle| \leq 2$$

È la **variante CHSH della disuguaglianza di Bell**.

Se le correlazioni sono stabilite alla sorgente, e più in generale se la teoria è locale, allora $|\langle S \rangle| \leq 2$.

Cosa prevede la **fisica quantistica**?

- Spin correlati: è possibile ottenere

$$|\langle S\rangle| = 2\sqrt{2}$$

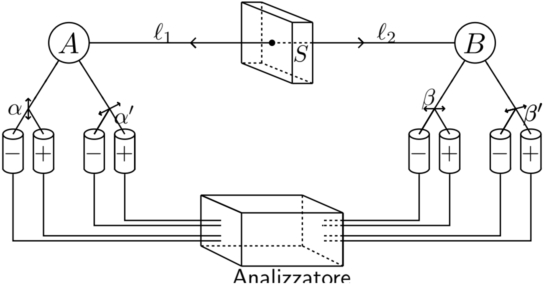
- Interferometro di Franson: è possibile ottenere

$$|\langle S\rangle| = 2\sqrt{2}$$

Quindi:

- **La fisica quantistica viola le disuguaglianze di Bell**.
- **La fisica quantistica è quindi una teoria non locale**.

1982: **Esperienze di Aspect** (con fotoni)



$S =$ un atomo di Calcio il cui diseccitamento produce una coppia di fotoni intrecciati.
Gli elementi A e B (orientati aleatoriamente) dirigono i fotoni verso quattro apparecchi di misura, ciascuno di questi apparecchi rivela la polarizzazione dei fotoni lungo una direzione qualsiasi.
I risultati ottenuti vengono infine analizzati dall'"analizzatore di correlazione".

Abbiamo

$$\langle S_{FQ} \rangle = 2,70 \qquad\qquad \langle S_{\text{esperimento}} \rangle = 2,697$$

con un margine d'errore sperimentale di $\pm 0,015$.

I risultati di questa esperienza sono in eccellente accordo con le predizioni quantistiche, e mostrano un'indiscutibile violazione delle disuguaglianze di Bell.

Le correlazioni non sono stabilite alla sorgente.

- **Nessuna teoria locale, ovvero di tipo classico, può essere utilizzata per spiegare le correlazioni osservate negli esperimenti.**
- Le correlazioni sono un **effetto puramente quantistico** che non ammette una spiegazione classica.
- Le correlazioni sono legate al fenomeno dell'**entanglement**.

Il teorema di Bell sancisce che **la fisica quantistica è una teoria non locale**, in cui quando due sistemi sono correlati è *impossibile descriverli come due entità separate*, e ciò *indipendentemente* dalla distanza che li separa, gli stati intrecciati rappresentano quindi una forma di **non località** e le correlazioni appaiono come un processo non locale. Cade qui il principio di separabilità della filosofica classica della Natura: **la Natura a livello microscopico è non locale**.

La teoria quantistica è quindi completa e la Natura è oggettivamente indeterministica (a livello della misura).

È fondamentale capire **dove interviene il principio delle cause locali**.

Se supponiamo che a, a' possono dipendere dalla misura di Bob, e b, b' da quelle di Alice, allora

$$S = a_{(\beta)}b_{(\alpha)} + a'_{(\beta)}b_{(\alpha')} + a_{(\beta')}b'_{(\alpha)} - a'_{(\beta')}b'_{(\alpha')}$$

Abbiamo $S = 0, \pm 2, \pm 4$. Otteniamo la disuguaglianza

$$|\langle S\rangle| \leq 4$$

Per il teorema di Bell dobbiamo calcolare dei termini del tipo $\langle ab \rangle$ poiché

$$|\langle S \rangle| = |\langle ab \rangle + \langle a'b \rangle + \langle ab' \rangle - \langle a'b' \rangle|$$

Calcolo quantistico

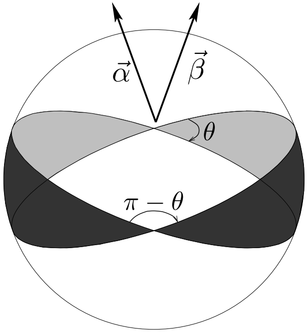
- Spin:

$$\begin{aligned}\langle ab\rangle &= (\Psi, \vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}^1 \otimes \vec{\beta}\cdot\vec{\sigma}^2\Psi) \\ &= -\cos\measuredangle(\vec{\alpha},\vec{\beta}) \overset{\text{def}}{=} (\alpha-\beta) \\ &= -\cos\theta\end{aligned}$$

- Franson:

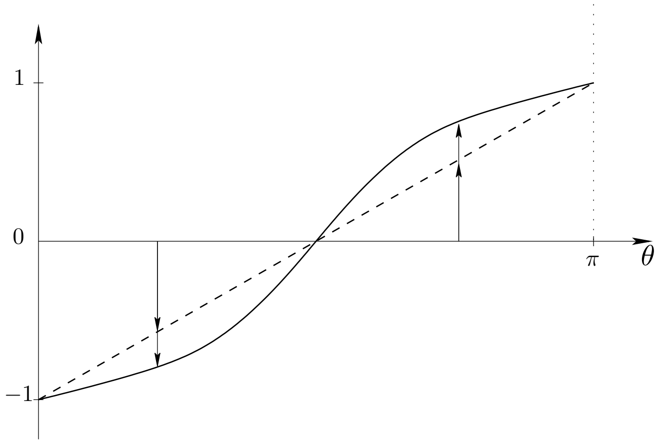
$$\begin{aligned}\langle ab\rangle &= \mathrm{Prob}\{a=b\} - \mathrm{Prob}\{a\neq b\} = -\cos(\alpha+\beta) \\ &= -\cos\theta\end{aligned}$$

Calcolo classico



Nella zona grigia (di estensione angolare 2θ) $ab = +1$ e in quella bianca (di estensione angolare $2\pi - 2\theta$) $ab = -1$ si ha

$$\langle ab \rangle = \left[(+1)\frac{2\theta}{2\pi} + (-1)\frac{2(\pi - \theta)}{2\pi} \right] = \frac{2\theta - \pi}{\pi}$$



La correlazione quantistica sarà sempre più forte di quella classica.