

FAM

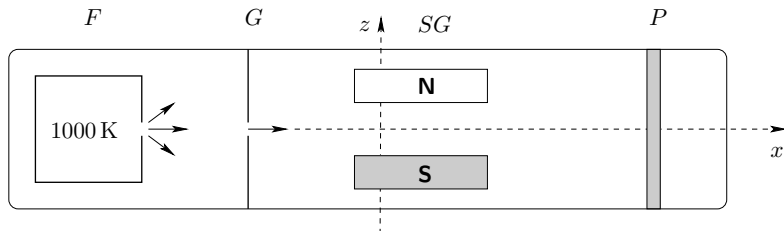
Il sistema spin 1/2

Christian Ferrari

Liceo di Locarno

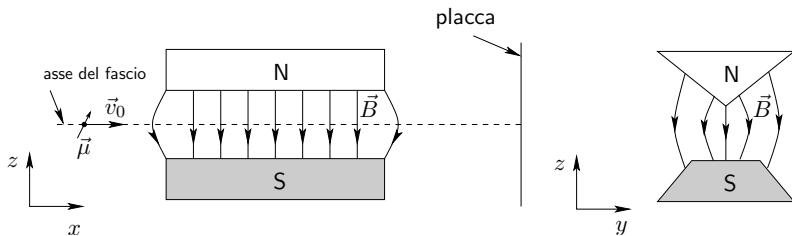
1922: **Stern e Gerlach**

- Misura del **momento magnetico** di atomi di argento con un campo magnetico fortemente inhomogeneo.
- **Quantificazione dell'orientazione del piano dell'orbita** prevista dalla “vecchia” teoria quantistica (?)



- Gli atomi di argento possiedono un momento magnetico orientato in modo *aleatorio*, ma *isotropo*.

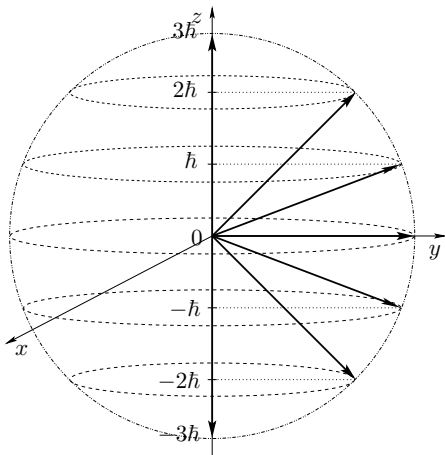
L'apparecchio di Stern e Gerlach



il campo magnetico è fortemente inomogeneo nella direzione z .

- **Teoria di Bohr–Sommerfeld** (“vecchia” teoria quantistica)

$$L_z = m\hbar \quad \text{con} \quad m \in \{-l, \dots, l-1, l\}$$



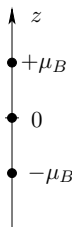
- **Relazione momento magnetico – momento angolare**

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e}\vec{L} \quad \mu_z = m\mu_B \quad \text{con} \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$$

e $m \in \{-\ell, \dots, \ell - 1, \ell\}$.

- $2\ell + 1$ possibili risultati: un numero **dispari**. Nel caso più semplice non triviale ($\ell = 1$)

$$\mu_z \in \{-\mu_B, 0, +\mu_B\} \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$$



Risultati sperimentali

- Solo due punti di impatto simmetrici sull'asse z



- Tutto accade come se ci fossero **solo due valori possibili** $\pm\mu_B$ per μ_z .

1925: **Uhlenbeck e Goudsmit**

- Ipotesi che nello stato fondamentale l'atomo di argento ha un momento angolare orbitale nullo

$$\ell = 0 \implies m = 0 \implies \mu_z = 0 .$$

- La deviazione del fascio è dovuta a un **momento magnetico intrinseco** $\vec{\mu}_s$, che deve essere associato a un **momento cinetico intrinseco** \vec{S} , chiamato **spin**.
- **Lo spin è una proprietà intrinseca delle particelle** che caratterizza la sua interazione con il campo magnetico.
- Questo momento angolare non è associato ad una rotazione di materia (come nel caso del momento angolare orbitale).

Nuova **proprietà** dell'elettrone:

- l'elettrone possiede **un momento angolare intrinseco**, chiamato **spin**, per il quale

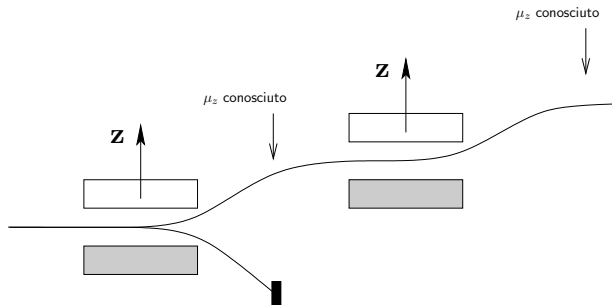
$$m_s = \pm \frac{1}{2} \hbar$$

- e **un momento magnetico intrinseco**

$$\mu_{s,z} = g \frac{e}{2m_e} m_s \quad g \approx 2 .$$

Ulteriori esperimenti

- L'apparecchio di Stern–Gerlach **misura** effettivamente una grandezza fisica.

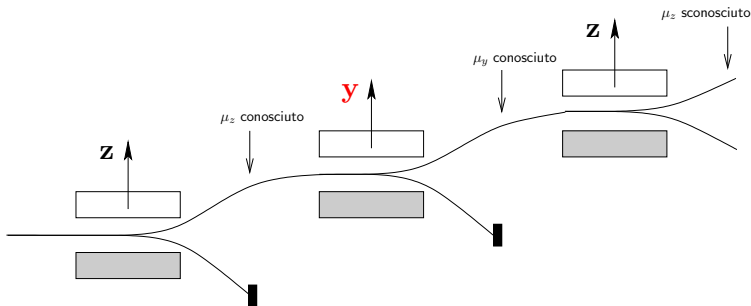


Ripetendo la stessa esperienza si osserva sempre lo stesso valore: dopo aver attraversato l'apparecchio di Stern–Gerlach l'atomo di argento si trova in uno stato ben definito caratterizzato dalla conoscenza esatta di μ_z .

- SG ruotato di 90° attorno all'asse x (si misura μ_y): si osservano di nuovo due punti d'impatto ben definiti corrispondenti a

$$\mu_y = \pm \mu_B .$$

- Misura delle componenti μ_z e μ_y .



Siamo portati alle conclusioni seguenti:

- **esistono delle grandezze** (qui μ_z e μ_y) **che non possono essere misurare in modo compatibile**, ossia in modo tale che il risultato di una misura non perturba i valori precedentemente conosciuti,
- se si conosce esattamente una grandezza (qui, per esempio, μ_y) non si conosce nulla sull'altra (qui μ_z),
- **i risultati di una misura sono generalmente aleatori**, anche se si conosce lo stato del sistema prima di essa.

- **Ipotesi:** è possibile disaccoppiare i gradi di libertà di spin con quelli spaziali.
- **Approssimazione:** invece di considerare la particella quantistica di argento caratterizzata sia da variabili spaziali, sia da variabili inerenti il momento magnetico intrinseco/spin, prendiamo in considerazione unicamente quest'ultime.
- Chiameremo questo sistema semplificato **sistema spin $\frac{1}{2}$** .
- **Evidenze sperimentali:**
 - l'esistenza di grandezze incompatibili;
 - la necessità di introdurre delle probabilità a livello della misura di un'osservabile.

Osservabili \Leftrightarrow apparecchi di misura

Gli apparecchi di Stern-Gerlach si distinguono tra loro per il diverso orientamento nello spazio \mathbb{R}^3 .

Apparecchio orientato nella direzione $\vec{n} \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow$ Osservabile $S_{\vec{n}}$

Tre osservabili particolari:

- $\vec{e}_z \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow S_{\vec{e}_z} \equiv S_z,$
- $\vec{e}_x \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow S_{\vec{e}_x} \equiv S_x,$
- $\vec{e}_y \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow S_{\vec{e}_y} \equiv S_y.$

L'**esperienza** mostra che:

- per qualsiasi misura e qualsiasi \vec{n} esistono **due soli risultati possibili**;
- le sole osservabili compatibili sono associate alle orientazioni \vec{n} e $-\vec{n}$ (che corrisponde a girare di π l'apparecchio di Stern-Gerlach e quindi sono identici, ossia conoscendone uno conosciamo entrambi).

Quindi

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{A} \subset \mathcal{B}_q = \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) .$$

Matrice autoaggiunta che rappresenta l'osservabile S_z

$$S_z = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Gli **autovettori** di S_z , notati ψ_{\pm} , sono

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e i rispettivi **autovalori** sono $\pm \frac{\hbar}{2}$, poiché

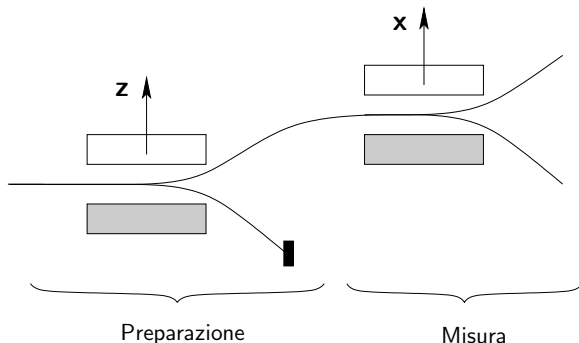
$$S_z \psi_{\pm} = \pm \frac{\hbar}{2} \psi_{\pm} .$$

$\mathcal{B} = \{\psi_+, \psi_-\}$ è una base dello spazio di Hilbert \mathbb{C}^2 ,
rappresenteremo tutte le osservabili ed i vettori rispetto a questa base ortonormata.

La **preparazione** di un sistema quantistico è un'operazione fondamentale. Dopo la preparazione segue la **misura**.

Esempio:

Per preparare il sistema nello stato ψ_{\pm} facciamo passare lo spin $\frac{1}{2}$ nell'apparecchio di SG orientato nella direzione \vec{e}_z : se è deviato verso l'alto/basso sappiamo che lo stato che descrive il sistema è ψ_{\pm} . Dopo la preparazione segue una misura di S_x .



L'**esperienza** mostra che: facendo delle esperienze su un grande numero di sistemi identici *preparati* nello stato ψ_+ (o ψ_-) si ha

$$\langle S_x \rangle_{\psi_{\pm}} = (\psi_{\pm}, S_x \psi_{\pm}) = 0 .$$

La **matrice autoaggiunta** di S_x rispetto alla base \mathcal{B} si scrive

$$S_x = \begin{pmatrix} (\psi_+, S_x \psi_+) & \xi_1 e^{-i\phi_1} \\ \xi_1 e^{i\phi_1} & (\psi_-, S_x \psi_-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 e^{-i\phi_1} \\ \xi_1 e^{i\phi_1} & 0 \end{pmatrix}$$

con $\xi_1 \in \mathbb{R}_+$ e $\phi_1 \in [0, 2\pi[$.

Per invarianza del determinante rispetto al cambiamento di base, dalla base \mathcal{B} alla base $\tilde{\mathcal{B}}$ formata dagli autovettori di S_x rispetto alla quale S_x è diagonale, abbiamo

$$-\xi_1^2 = -\frac{\hbar^2}{4} \implies \xi_1 = \pm \frac{\hbar}{2} \longrightarrow \xi_1 = +\frac{\hbar}{2}$$

resta unicamente un'indeterminazione su ϕ_1 . Possiamo scegliere per semplicità $\phi_1 = 0$.

Matrice autoaggiunta che rappresenta l'osservabile S_x

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli **autovettori** di S_x , notati φ_{\pm} , sono

$$\varphi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \varphi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e i rispettivi **autovalori** sono $\pm \frac{\hbar}{2}$, poiché

$$S_x \varphi_{\pm} = \pm \frac{\hbar}{2} \varphi_{\pm} .$$

L'**esperienza** mostra che: facendo delle esperienze su un grande numero di sistemi identici *preparati* negli stati ψ_{\pm} o φ_{\pm} si ha

$$\langle S_y \rangle_{\psi_{\pm}} = (\psi_{\pm}, S_y \psi_{\pm}) = 0 \quad \langle S_y \rangle_{\varphi_{\pm}} = (\varphi_{\pm}, S_y \varphi_{\pm}) = 0 .$$

La **matrice autoaggiunta** di S_y rispetto alla base \mathcal{B} si scrive

$$S_y = \begin{pmatrix} (\psi_+, S_y \psi_+) & \xi_2 e^{-i\phi_2} \\ \xi_2 e^{i\phi_2} & (\psi_-, S_y \psi_-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \xi_2 e^{-i\phi_2} \\ \xi_2 e^{i\phi_2} & 0 \end{pmatrix}$$

con $\xi_2 \in \mathbb{R}_+$ e $\phi_2 \in [0, 2\pi[$. Come precedentemente $\xi_2 = \frac{\hbar}{2}$, inoltre

$$0 = \langle S_y \rangle_{\varphi_-} = (\varphi_-, S_y \varphi_-) = \frac{e^{-i\phi_2} + e^{i\phi_2}}{2} = \cos \phi_2$$

da cui $\phi_2 \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$, scegliamo $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$.

Matrice autoaggiunta che rappresenta l'osservabile S_y

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Gli **autovettori** di S_y , notati χ_{\pm} , sono

$$\chi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \chi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

e i rispettivi **autovalori** sono $\pm \frac{\hbar}{2}$, poiché

$$S_y \chi_{\pm} = \pm \frac{\hbar}{2} \chi_{\pm} .$$

*Qui vediamo la **necessità** di descrivere l'insieme delle osservabili con delle matrici a coefficienti complessi e quindi **costruire la fisica quantistica non su uno spazio vettoriale reale, bensì complesso.***

- Gli **stati puri** ψ_+ e ψ_- , che sono di conoscenza assoluta per l'osservabile S_z , ma non per S_x e S_y .
- Gli **stati (puri) di superposizione** degli stati propri ψ_+ e ψ_-

$$\varphi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_+ \pm \psi_-) \quad \text{e} \quad \chi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_+ \pm i\psi_-) .$$

- In generale uno stato puro è rappresentato da un **vettore combinazione lineare** in $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$.
- Gli stati puri sono i raggi in \mathcal{H} , e sono in corrispondenza con i **proiettori 1D** nello spazio convesso degli stati \mathcal{E} .

- Gli **stati misti** sono rappresentati da **combinazioni lineari convesse di proiettori** associati agli stati puri.
Per esempio la matrice densità, $\alpha \in]0, 1[$

$$\rho = \alpha P_{\psi_+} + (1 - \alpha) P_{\psi_-} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

rappresenta uno stato misto del sistema, l'informazione sul sistema è la seguente: esso si trova nello stato puro ψ_+ con probabilità α oppure si trova nello stato puro ψ_- con probabilità $(1 - \alpha)$, *indipendentemente da qualsiasi misura!*

- È importante notare la differenza tra lo *stato misto* ρ ed il *proiettore associato a uno stato puro* di superposizione ψ del sistema

$$\psi = \sqrt{\alpha}\psi_+ + \sqrt{1-\alpha}e^{i\theta}\psi_- \implies \psi = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} \\ \sqrt{1-\alpha}e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

$$P_\psi = \begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{\alpha(1-\alpha)}e^{i\theta} \\ \sqrt{\alpha(1-\alpha)}e^{-i\theta} & 1-\alpha \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} = \rho.$$

- Per lo stato puro ψ (o P_ψ), è possibile trovare un'osservabile per la quale esso è uno stato di conoscenza assoluta, al contrario per lo stato misto questo è impossibile.

È possibile caratterizzare lo spin $\frac{1}{2}$ dal punto di vista geometrico, si dimostra la seguente corrispondenza biunivoca:

$$\psi \in \mathbb{C}^2 \quad \iff \quad \vec{n} \in \mathbb{S}^2$$

dove ψ è un vettore normalizzato, che rappresenta uno stato puro in $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, e \vec{n} un vettore normalizzato di \mathbb{R}^3 che si trova quindi sulla sfera unitaria

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} .$$

In particolare

$$S_{\vec{n}}\psi_{\vec{n}} = \frac{\hbar}{2}\psi_{\vec{n}}$$

- Il vettore \vec{n} è definito in funzione di ψ da

$$\frac{\hbar}{2}\vec{n} = (\psi, \vec{S}\psi).$$

- Il vettore ψ è definito in funzione di \vec{n} da

$$\psi = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

dove (θ, ϕ) sono le coordinate sferiche del vettore

$$\vec{n} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta).$$

L'**energia** d'interazione spin - campo magnetico vale

$$E^{inter} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} .$$

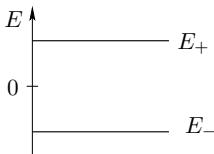
Utilizzando il **principio di corrispondenza**, e la relazione spin-momento magnetico $\vec{\mu}_s = \gamma\vec{S}$, otteniamo

$$H = -\gamma BS_z = \begin{pmatrix} -\gamma B \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & \gamma B \frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} .$$

Livelli di energia ($H\psi = E\psi$)

$$E_{\pm} = \mp \gamma B \frac{\hbar}{2} = \mp \frac{\hbar\omega}{2} \quad \text{dove} \quad \omega = \gamma B$$

associati agli autovettori ψ_{\pm} di H



Per ottenere l'evoluzione temporale dobbiamo determinare l'**operatore unitario** $U_t = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$.

$$U_t = \begin{pmatrix} e^{i\gamma\frac{B}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma\frac{B}{2}t} \end{pmatrix}.$$

L'evoluzione temporale dello stato puro all'istante $t = 0$ dato da

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

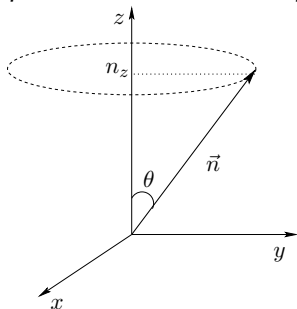
è

$$\psi_t = U_t\psi_0 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{-i(-\gamma Bt+\varphi)/2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i(-\gamma Bt+\varphi)/2} \end{pmatrix}$$

Lo spin “gira” attorno all’asse del campo magnetico. Abbiamo

$$\langle \vec{S} \rangle_{\psi_t} = \frac{\hbar}{2} \vec{n}(t)$$

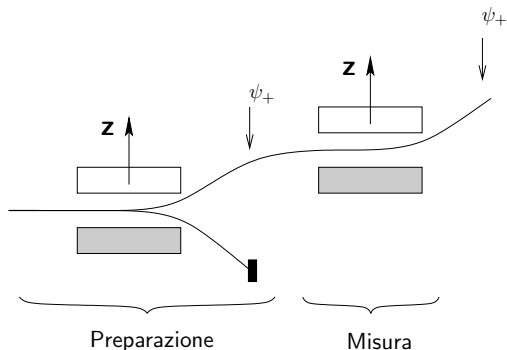
il valore medio si comporta come il suo corrispondente classico.



- Se $\omega t = 2\pi$: $\vec{n}(t) = \vec{n}(0)$, **MA** $\psi_t = e^{\pm i\pi} \psi_0$.
- Se $\omega t = 4\pi$: $\vec{n}(t) = \vec{n}(0)$, **E** $\psi_t = \psi_0$.

Chiaramente ψ e $-\psi$ rappresentano lo stesso stato:

\implies **è la simmetria 4π dello spin $1/2$.**

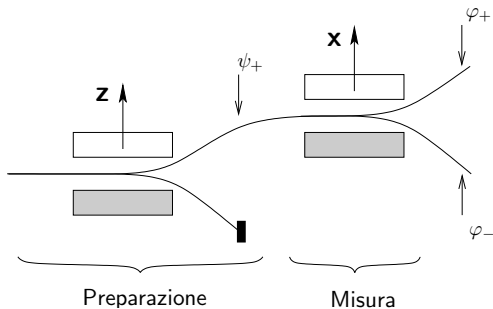


- Abbiamo le seguente probabilità oggettive

$$\text{Prob}_{\psi_+} \{S_z = +\hbar/2\} = \|P_{\psi_+} \psi_+\|^2 = |(\psi_+, \psi_+)|^2 = 1$$

$$\text{Prob}_{\psi_+} \{S_z = -\hbar/2\} = \|P_{\psi_-} \psi_+\|^2 = |(\psi_-, \psi_+)|^2 = 0.$$

- Lo stato ψ_+ è uno stato di conoscenza assoluta per S_z .



- Abbiamo le seguenti probabilità oggettive

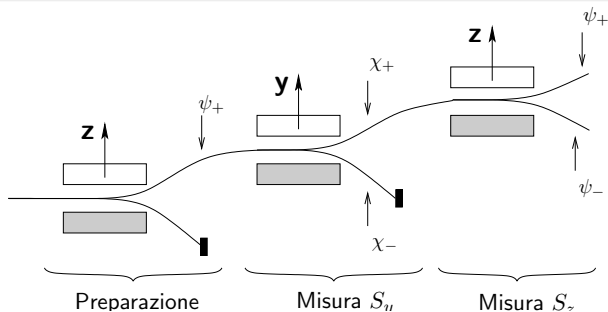
$$\text{Prob}_{\psi_+} \{S_x = +\hbar/2\} = \|P_{\varphi_+} \psi_+\|^2 = |(\varphi_+, \psi_+)|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Prob}_{\psi_+} \{S_x = -\hbar/2\} = \|P_{\varphi_-} \psi_+\|^2 = |(\varphi_-, \psi_+)|^2 = \frac{1}{2}.$$

- Lo stato ψ_+ non è di conoscenza assoluta per S_x :

$$(\Delta S_x)_{\psi_+} = \frac{\hbar}{2}$$

esso è uno stato di superposizione degli autovettori di S_x .



- Abbiamo le seguenti probabilità oggettive

$$\text{Prob}_{\psi_+} \{S_y = +\hbar/2\} = \|P_{\chi_+} \psi_+\|^2 = |(\chi_+, \psi_+)|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Prob}_{\psi_+} \{S_y = -\hbar/2\} = \|P_{\chi_-} \psi_+\|^2 = |(\chi_-, \psi_+)|^2 = \frac{1}{2}.$$

- Lo stato ψ_+ non è di conoscenza assoluta per S_y

$$(\Delta S_y)_{\psi_+} = \frac{\hbar}{2}$$

esso è uno stato di superposizione degli autovettori di S_y .

Consideriamo ora il caso in cui nella misura è stato osservato il valore $+\frac{\hbar}{2}$.

Immediatamente dopo la misura, per il **postulato della riduzione dello stato**, lo stato è l'autovettore di S_y con questo autovalore, ossia χ_+ .

- Nella successiva misura dell'osservabile S_z abbiamo le seguenti probabilità oggettive

$$\text{Prob}_{\chi_+}\{S_z = +\hbar/2\} = \|P_{\psi_+}\chi_+\|^2 = |(\psi_+, \chi_+)|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Prob}_{\chi_+}\{S_z = -\hbar/2\} = \|P_{\psi_-}\chi_+\|^2 = |(\psi_-, \chi_+)|^2 = \frac{1}{2}$$

- Lo stato χ_+ non è di conoscenza assoluta per S_z

$$(\Delta S_z)_{\chi_+} = \frac{\hbar}{2}$$

esso è uno stato di superposizione degli autovettori di S_z .

- Nella seconda misura di S_z , benché lo stato del sistema sia stato inizialmente preparato nel suo autovettore ψ_+ , si ottengono dei risultati probabilistici: la misura di S_y ha modificato lo stato iniziale ψ_+ .
- La misura di S_y ha influenzato il risultato precedente della misura di S_z (ossia $+\frac{\hbar}{2}$ poiché abbiamo preparato lo stato come ψ_+), ciò è caratteristico del fatto che le osservabili S_y e S_z non sono compatibili.

Matematicamente l'incompatibilità si manifesta con il fatto che le matrici S_y e S_z non commutano, infatti abbiamo

$$S_y S_z - S_z S_y = [S_y, S_z] = i\hbar S_x .$$

Stato iniziale: stato *misto* ($p \in]0, 1[$)

$$\rho = pP_{\psi_+} + (1 - p)P_{\psi_-} .$$

Una possibilità per ottenere questo stato, nel caso $p = \frac{1}{2}$, è di prendere un fascio uscente dall'apparecchio di Stern-Gerlach *senza sapere* se è stato deviato verso l'alto o verso il basso.

- Abbiamo le seguenti probabilità oggettive

$$\text{Prob}_{\rho}\{S_z = +\hbar/2\} = \text{Tr}(\rho P_{\psi_+}) = p$$

$$\text{Prob}_{\rho}\{S_z = -\hbar/2\} = \text{Tr}(\rho P_{\psi_-}) = 1 - p .$$

Determinismo

La conoscenza esatta dello stato (stato puro) prima della misura non permette di determinare esattamente lo stato dopo la misura: a livello della misura la fisica quantistica è intrinsecamente non deterministica e **il principio del determinismo va quindi parzialmente abbandonato nella teoria quantistica** (resta comunque il determinismo nell'evoluzione temporale).

Compatibilità

Le tre osservabili S_x , S_y e S_z non sono compatibilmente misurabili e quindi **il principio di compatibilità non è valido nella teoria quantistica.**

Definizione di realtà (secondo EPR):

*Se, **senza disturbare** in alcun modo un sistema, possiamo predire con certezza (cioè con probabilità uguale ad uno) il valore di una quantità fisica, allora esiste un **elemento di realtà** fisica corrispondente a tale quantità fisica.*

Realtà

Se lo stato del sistema è ψ_+ e quindi soddisfa

$$S_z \psi_+ = +\frac{\hbar}{2} \psi_+ .$$

- Allora esiste un elemento di realtà fisica associata alla quantità fisica S_z . Infatti possiamo predire con certezza il valore di S_z senza disturbare il sistema.

- Per S_x possiamo unicamente dire con che probabilità osserveremo, effettuando una misura, il risultato $\pm \frac{\hbar}{2}$. Questa probabilità è $\text{Prob}_{\psi_+} \{S_x = \pm \hbar/2\} = \frac{1}{2}$. Un valore esatto per S_x , se lo spin è nello stato ψ_+ , non è possibile predirlo con certezza, ma può essere unicamente ottenuto con una misura, misura che però disturba il sistema modificandone lo stato. A S_x *non corrisponde un elemento di realtà fisica* quando lo stato dello spin è ψ_+ .

Le proprietà fisiche associate allo spin $1/2$ non possono sempre essere reali per qualsiasi stato del sistema e quindi **la teoria quantistica** in questo senso **non è realista**. Quindi, contrariamente alla fisica classica, in cui esiste una *“realtà” indipendente dall’osservatore che preesiste alla misura*, in fisica quantistica ciò non è più vero.