

Risonanza Magnetica Nucleare (RMN)

Un'applicazione della fisica quantistica: Teoria di base

Christian Ferrari

- Protone e neutroni possiedono, oltre alla carica elettrica e la massa, una proprietà intrinseca chiamata **momento magnetico intrinseco** $\vec{\mu}_s$, che caratterizza l'interazione tra la particella e un campo magnetico. A $\vec{\mu}_s$ è associato un momento angolare intrinseco \vec{S} chiamato **spin**. Vale la relazione

$$\vec{\mu}_s = \gamma \vec{S} \quad \gamma = g \frac{e}{2m_p}$$

γ è chiamato **rapporto giromagnetico**.

- La fisica quantistica mostra che S_z può assumere solo i valori $\pm \frac{\hbar}{2}$, si dice che protone e neutroni sono **particelle di spin $\frac{1}{2}$** .

Ad ogni **stato dello spin** può essere associata una **direzione orientata in \mathbf{R}^3** :

$$S_z = +\frac{\hbar}{2} \longrightarrow +\vec{e}_z$$

$$S_z = -\frac{\hbar}{2} \longrightarrow -\vec{e}_z$$

vedi Fig. 1.

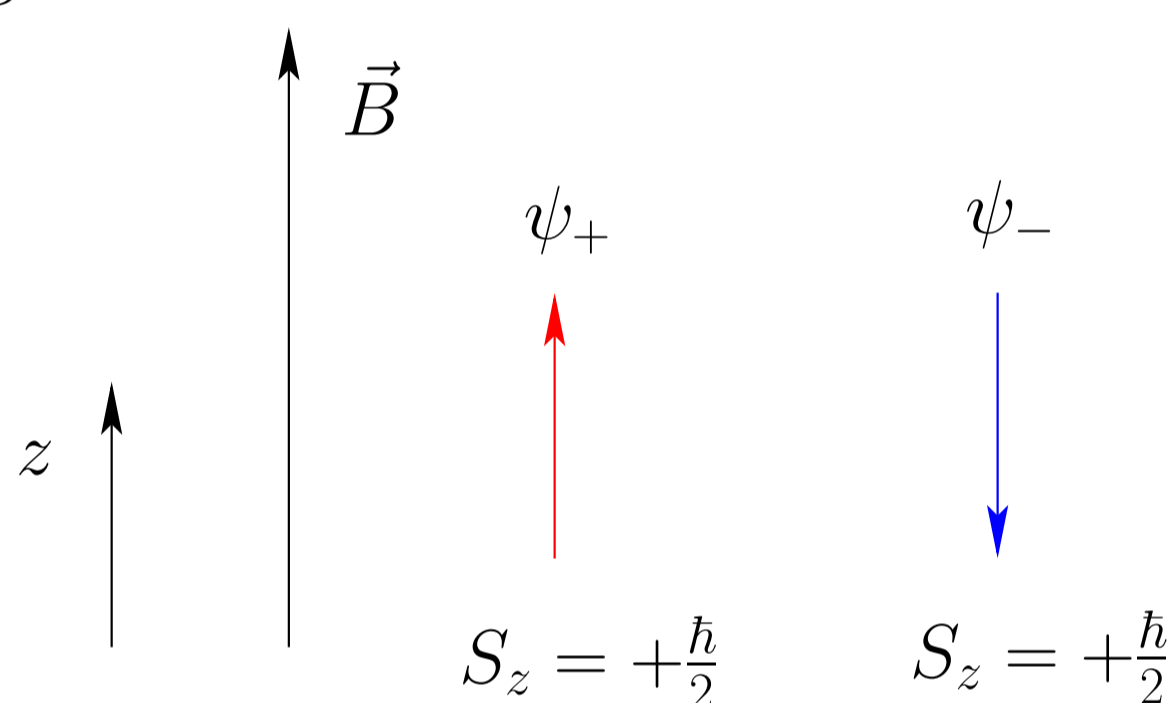


Fig. 1: Stati dello spin $\frac{1}{2}$.

- Quanto un nucleo contiene un numero *pari* di protoni e neutroni, gli spin si compensano e il nucleo è di spin 0, ma se un nucleo contiene un numero *dispari* di protoni o di neutroni si ha solo una compensazione parziale e (nel caso più semplice) il nucleo ha uno spin $\frac{1}{2}$. Vedi Fig. 2. Il caso più semplice è il nucleo di idrogeno ^1H .

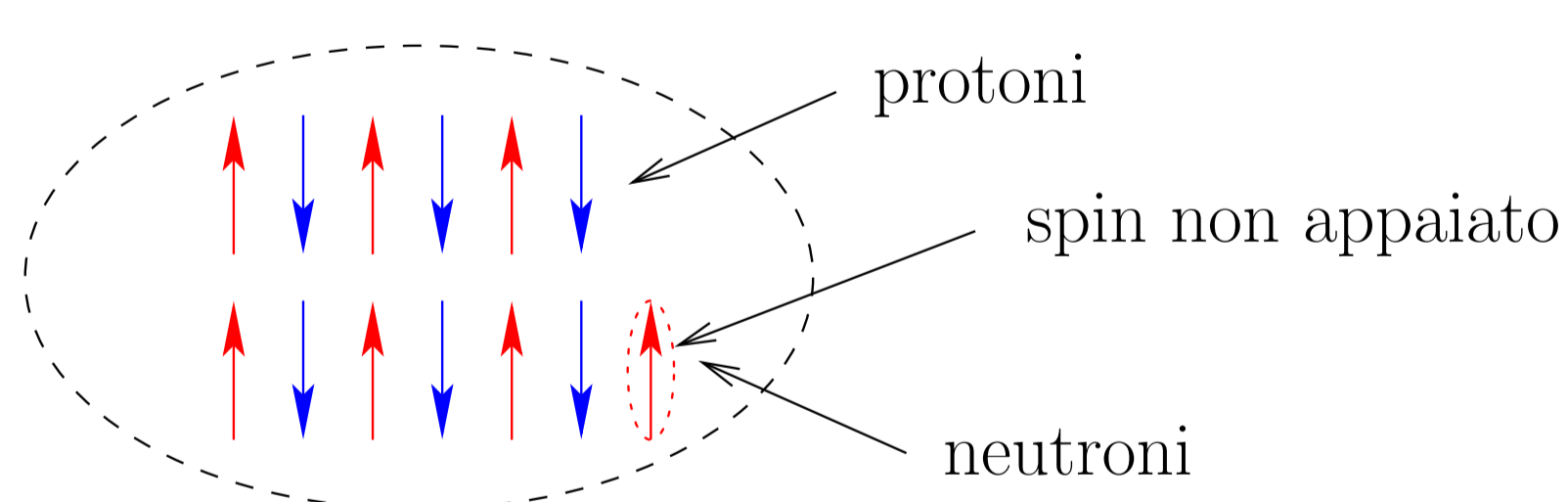


Fig. 2: Lo spin non appaiato di un neutrone determina quello del nucleo ^{13}C .

I nuclei sono caratterizzati da g : $g_{^1\text{H}} = 5,58$, $g_{^{13}\text{C}} = 1,40$, $g_{^{19}\text{F}} = 5,26$.

- Un momento magnetico $\vec{\mu}$ in un campo magnetico \vec{B} possiede un'energia

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Per un nucleo di spin $\frac{1}{2}$ in un campo magnetico omogeneo $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ vi sono solo due possibili livelli di energia (vedi Fig. 3)

$$E_{\pm} = \mp \frac{\hbar \omega_0}{2} \quad \omega_0 = \gamma B_0$$

ω_0 è chiamata **pulsazione di Larmor**.

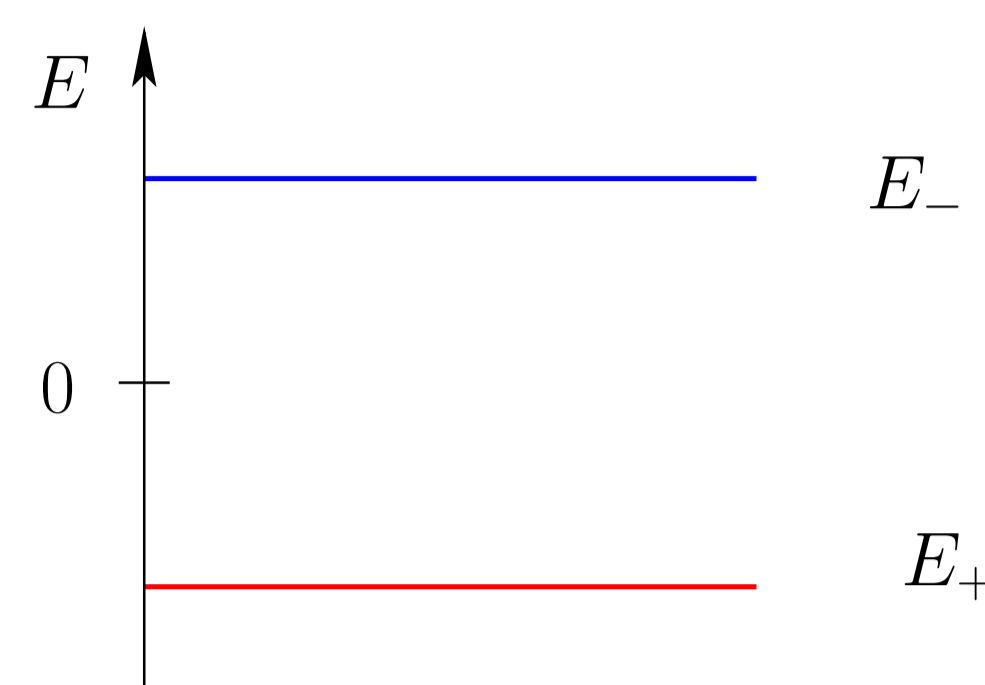


Fig. 3: Livelli di energia dello spin $\frac{1}{2}$ in un campo magnetico.

- Dato uno stato iniziale dello spin, l'**evoluzione temporale** può essere rappresentata come il moto di precessione del vettore corrispondente allo stato, di velocità angolare ω_0 , vedi Fig. 4.

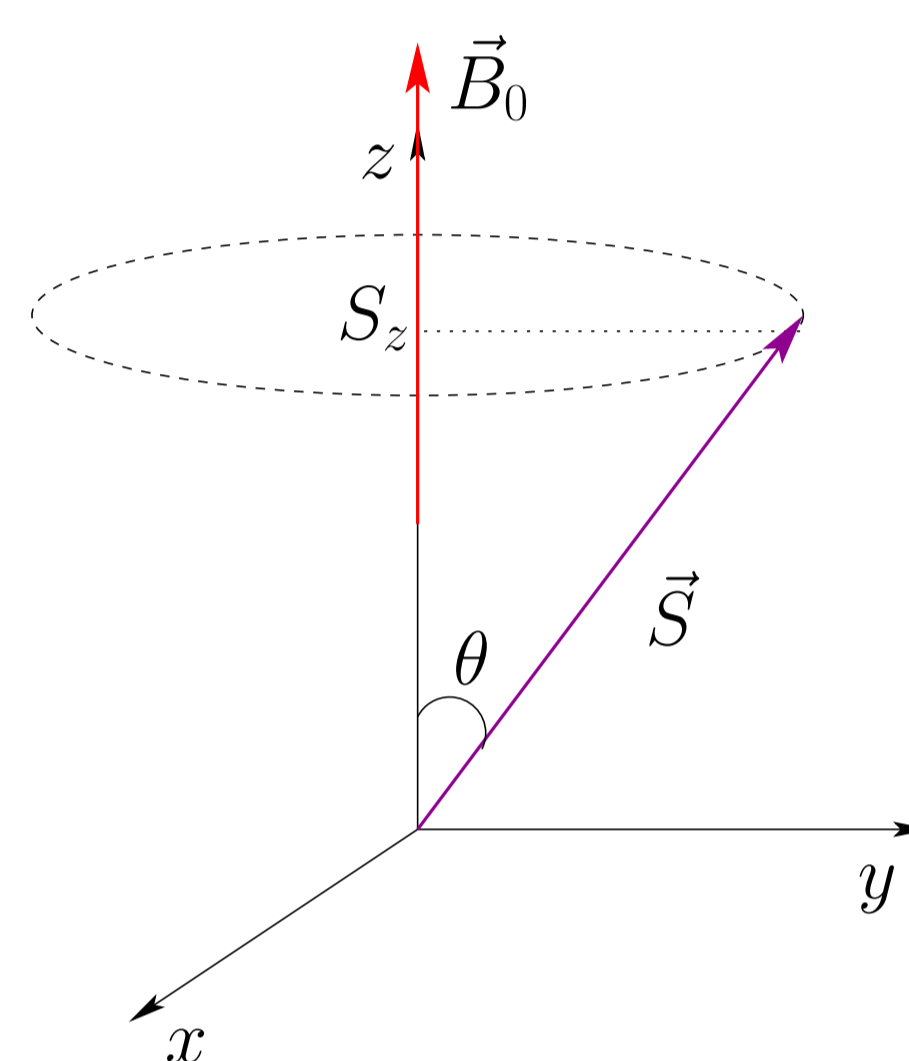


Fig. 4: Evoluzione del vettore associato ad uno spin in un campo magnetico omogeneo.

- Oltre al campo omogeneo \vec{B}_0 si aggiunge un campo variabile nel piano xy perpendicolare ad esso dato da

$$\vec{B}_1(t) = B_1 [\cos(\omega t) \vec{e}_x - \sin(\omega t) \vec{e}_y]$$

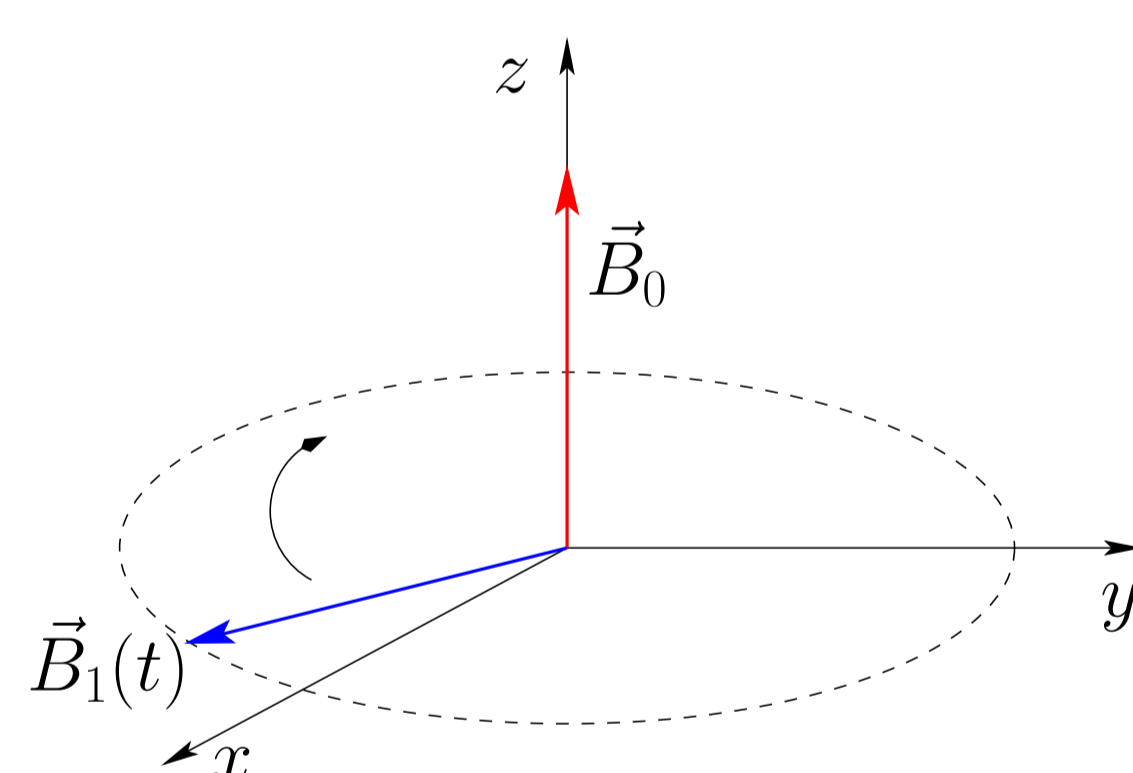


Fig. 5: Campo magnetico omogeneo \vec{B}_0 e campo magnetico variabile $\vec{B}_1(t)$.

Si definisce la pulsazione $\omega_1 = \gamma B_1$.

- Se $\vec{B}(t) = \vec{B}_0 + \vec{B}_1(t)$ allora l'evoluzione temporale non è più la precessione illustrata in Fig. 4. In particolare se lo stato iniziale dello spin è $\varphi(0) = \psi_+$, ossia parallelo rispetto a \vec{B}_0 , allora la fisica quantistica mostra che la **probabilità di inversione dello spin** al tempo t è

$$P_{\varphi(t)}\{S_z = -\hbar/2\} = \left(\frac{\omega_1}{\Omega}\right)^2 \sin^2 \frac{\Omega t}{2}$$

dove

$$\Omega = \sqrt{(\Delta\omega)^2 + \omega_1^2} \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0,$$

- Al tempo t lo spin si trova nello stato ψ_- , ossia antiparallelo rispetto a \vec{B}_0 , con una certa probabilità che dipende in particolare dalla pulsazione ω del campo variabile.

o Caso $\omega = \omega_0 + 3\omega_1$

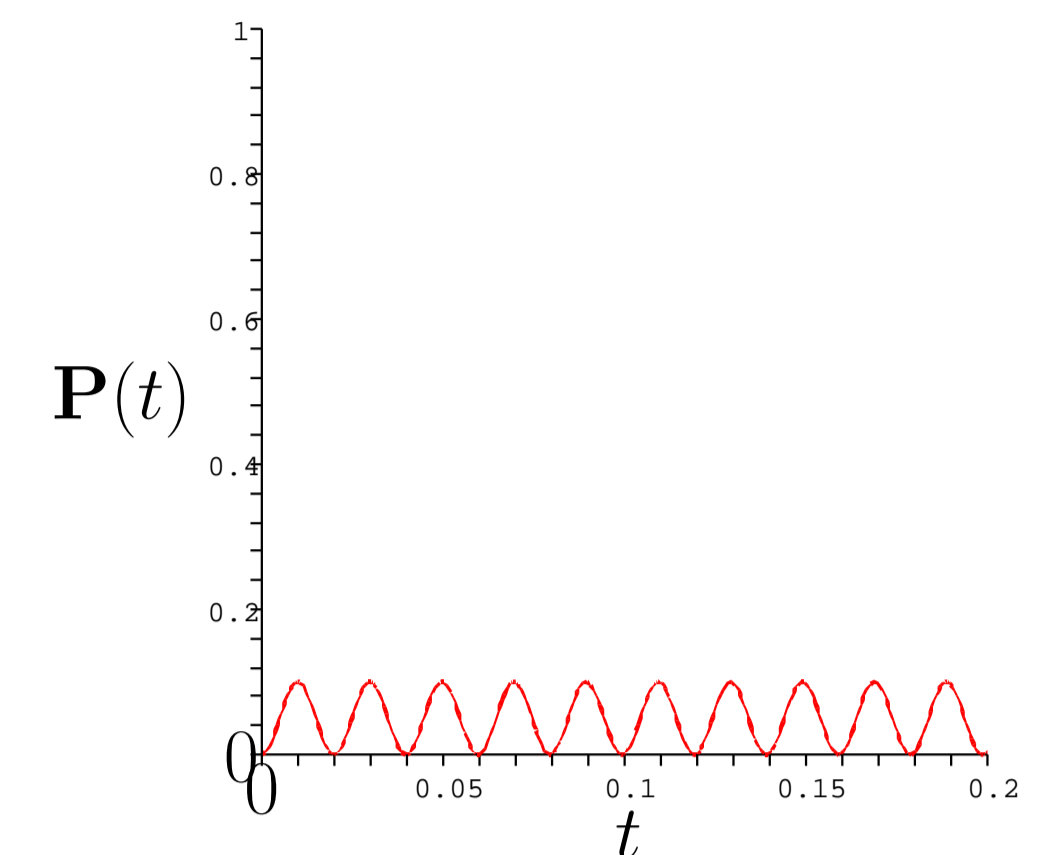


Fig. 6: Probabilità di inversione dello spin in condizioni qualsiasi.

o Caso $\omega = \omega_0$

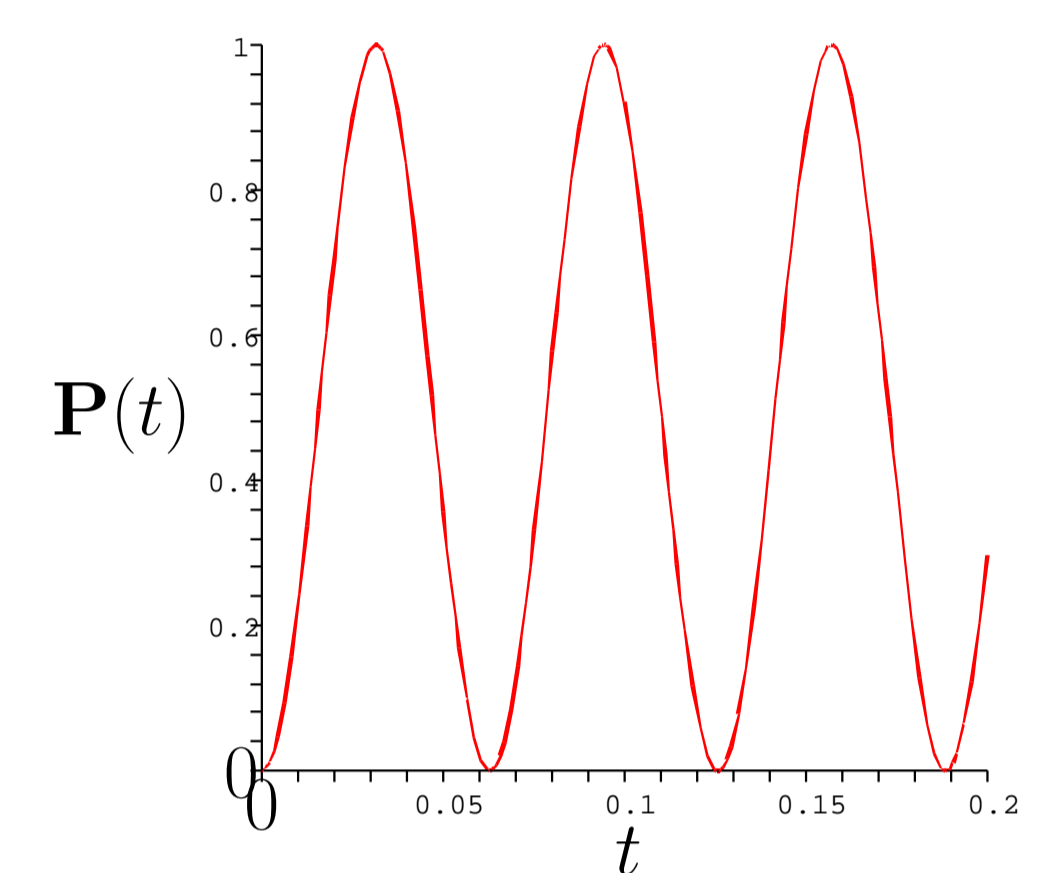


Fig. 7: Probabilità di inversione dello spin nelle condizioni di risonanza.

- Se la pulsazione del campo \vec{B}_1 corrisponde alla pulsazione di Larmor ω_0 del moto di precessione dello spin attorno all'asse del campo magnetico \vec{B}_0 , lo spin si inverte periodicamente: questo fenomeno viene chiamato **risonanza magnetica nucleare**. Il risultato non dipende dall'intensità del campo variabile \vec{B}_1 : un campo variabile perpendicolare a \vec{B}_0 permette di invertire lo spin anche se la sua intensità è molto debole, a condizione che la sua frequenza corrisponda alla frequenza di risonanza, ossia la **frequenza di Larmor** $\nu_L = \frac{\omega_0}{2\pi}$. ν_L dipende dall'intensità B_0 del campo magnetico statico e dai nuclei che si vogliono studiare via il rapporto giromagnetico γ .

- Il periodo delle oscillazioni è dato da $\frac{2\pi}{\Omega}$, e nelle condizioni di risonanza si ha inversione dello spin ogni $T_{\text{ris}}/2$ con

$$T_{\text{ris}} = \frac{\omega_1}{2\pi}.$$

Queste oscillazioni corrispondono alle transizioni $E_+ \longleftrightarrow E_-$, vedi Fig. 8, con assorbimento/emissione di fotoni di energia

$$E_- - E_+ = \hbar \omega_0.$$

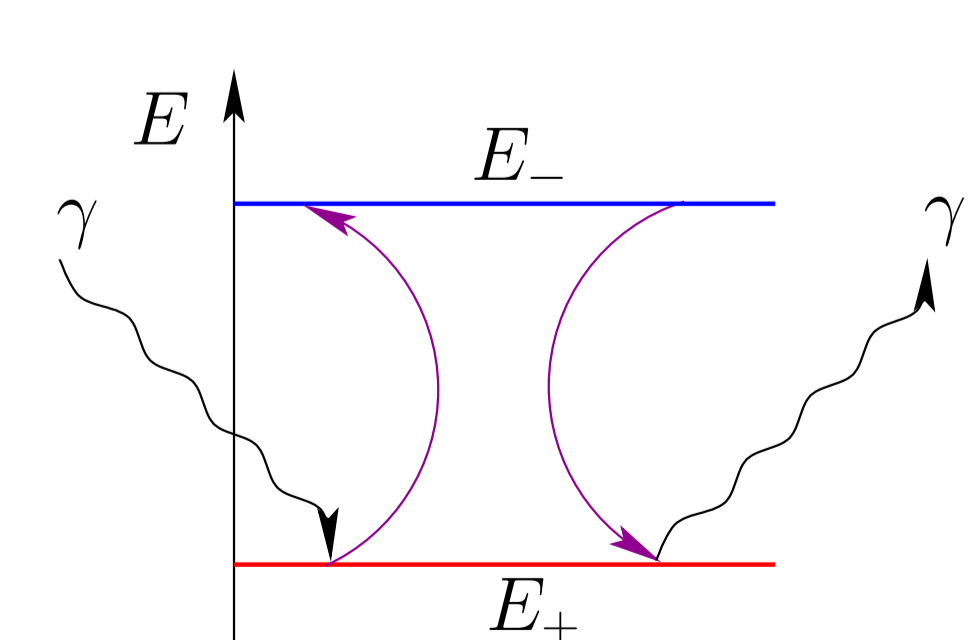


Fig. 8: Transizioni $E_+ \longleftrightarrow E_-$ con assorbimento/emissione di fotoni.

Risonanza Magnetica Nucleare (RMN)

Un'applicazione della fisica quantistica: Aspetti pratici

- Il campione da studiare è posto in un **campo magnetico uniforme** \vec{B}_0 di intensità pari a qualche tesla. Per un protone se $B_0 = 14$ T allora $\nu_L \approx 600$ MHz.

- Secondo la **legge di Boltzmann** la probabilità che un uno spin all'*equilibrio termico di temperatura* T si trovi nel livello di energia E_α è dato da

$$\mathbf{P}\{E = E_\alpha\} = \frac{e^{-\beta E_\alpha}}{Z}$$

dove $\beta = \frac{1}{k_B T}$ e Z è un fattore di normalizzazione dato da

$$Z = \sum_{\alpha} e^{-\beta E_\alpha}.$$

- Per uno spin abbiamo quindi

$$\frac{\mathbf{P}\{E = E_+\}}{\mathbf{P}\{E = E_-\}} = \exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{k_B T}\right)$$

Alla temperatura ambiente, e per una frequenza di risonanza di 600 MHz, si ha $\exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{k_B T}\right) \ll 1$: nello *stato di equilibrio* la maggior parte degli spin sono orientati nella direzione del campo magnetico, e hanno uno stato ψ_+ . Vedi Fig. 9.

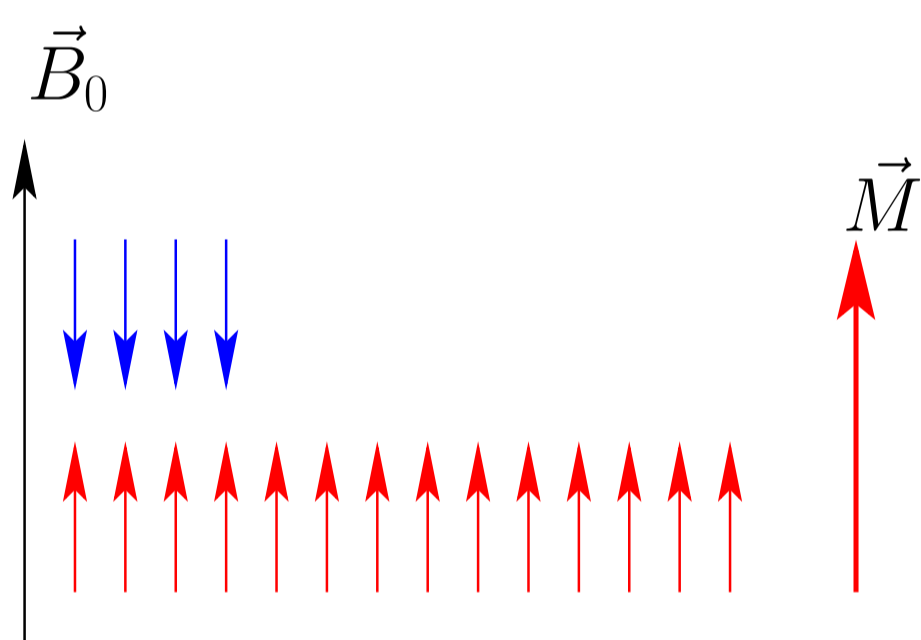


Fig. 9: Origine della magnetizzazione \vec{M} in un campione macroscopico.

- La **magnetizzazione** \vec{M} del campione posto nel campo magnetico \vec{B}_0 è allineata lungo l'asse z

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix} \quad M > 0.$$

- L'applicazione durante un'intervallo di tempo t_π tale che $\omega_1 t_\pi = \pi$ del un campo magnetico $\vec{B}_1(t)$ (detto **campo di radiofrequenza**) la cui pulsazione ω è uguale alla pulsazione di risonanza ω_0 , il cosiddetto **impulso** π , fa passare gli spin dallo stato ψ_+ allo stato ψ_- (e da ψ_- a ψ_+), provocando un'inversione dello spin dei nuclei rispetto a quella dell'equilibrio iniziale. Dopo questa operazione la magnetizzazione cambia segno, vedi Fig. 10.

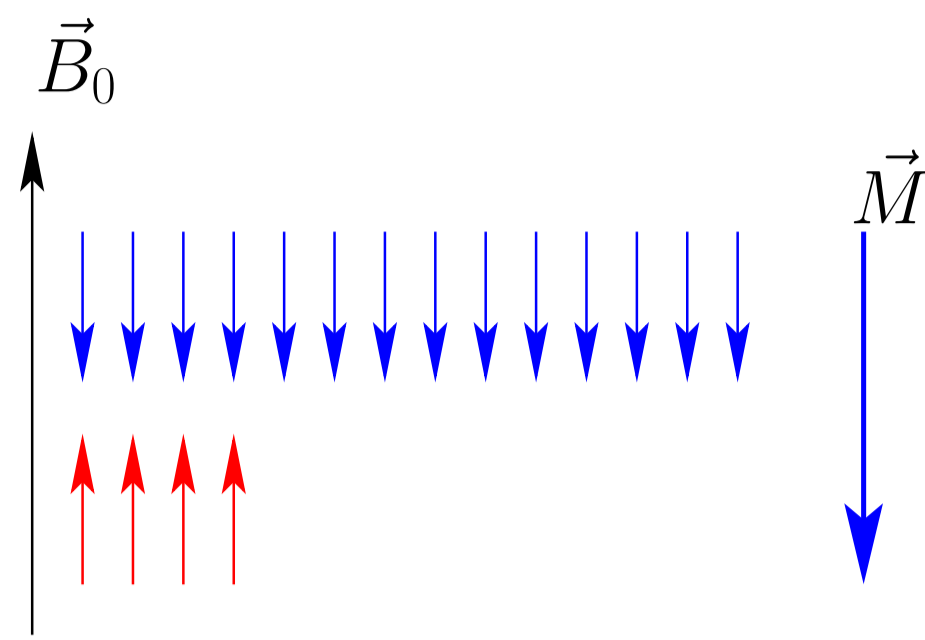


Fig. 10: Inversione della magnetizzazione \vec{M} in un campione macroscopico dopo un impulso π .

- In pratica si utilizza anche un **impulso** $\frac{\pi}{2}$, definita da $\omega_1 t_{\pi/2} = \pi/2$. In questo caso lo spin, inizialmente allineato al campo \vec{B}_0 , si trova nel piano ad esso perpendicolare, vedi Fig. 11.

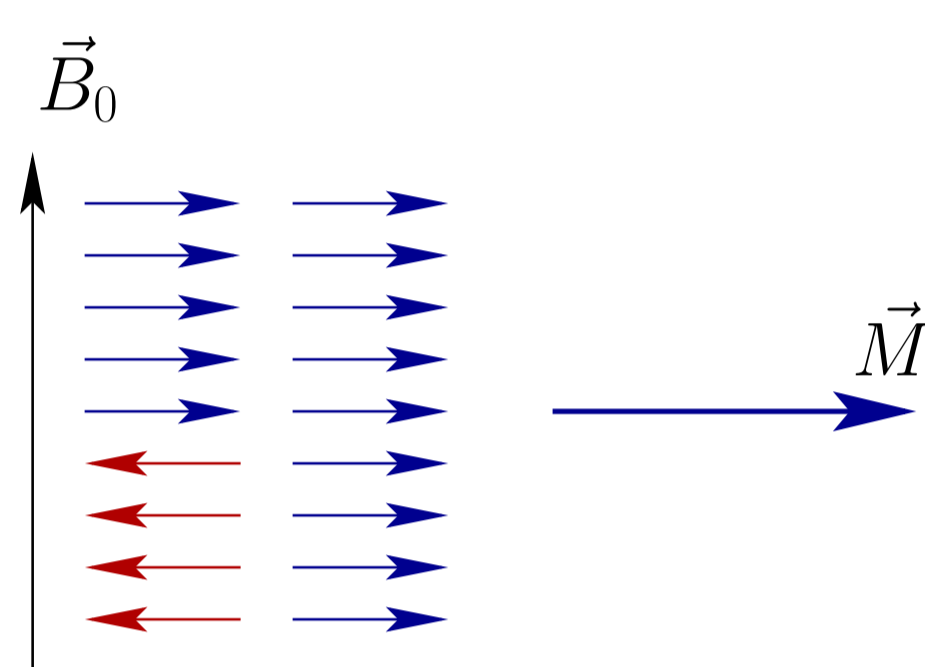


Fig. 11: Ribaltamento della magnetizzazione \vec{M} in un campione macroscopico dopo un impulso $\frac{\pi}{2}$.

- Dopo uno di questi due impulsi, ad opera del campo magnetico di radiofrequenza $\vec{B}_1(t)$, lo stato dell'insieme di spin è uno *stato di non equilibrio*. Il ritorno allo stato di equilibrio (vedi Fig. 9) può essere illustrato grazie all'evoluzione della magnetizzazione, vedi Fig. 12. Esso ha un moto di precessione attorno al campo magnetico \vec{B}_0 accompagnato da un aumento della componente z e una riduzione della componente nel piano xy .

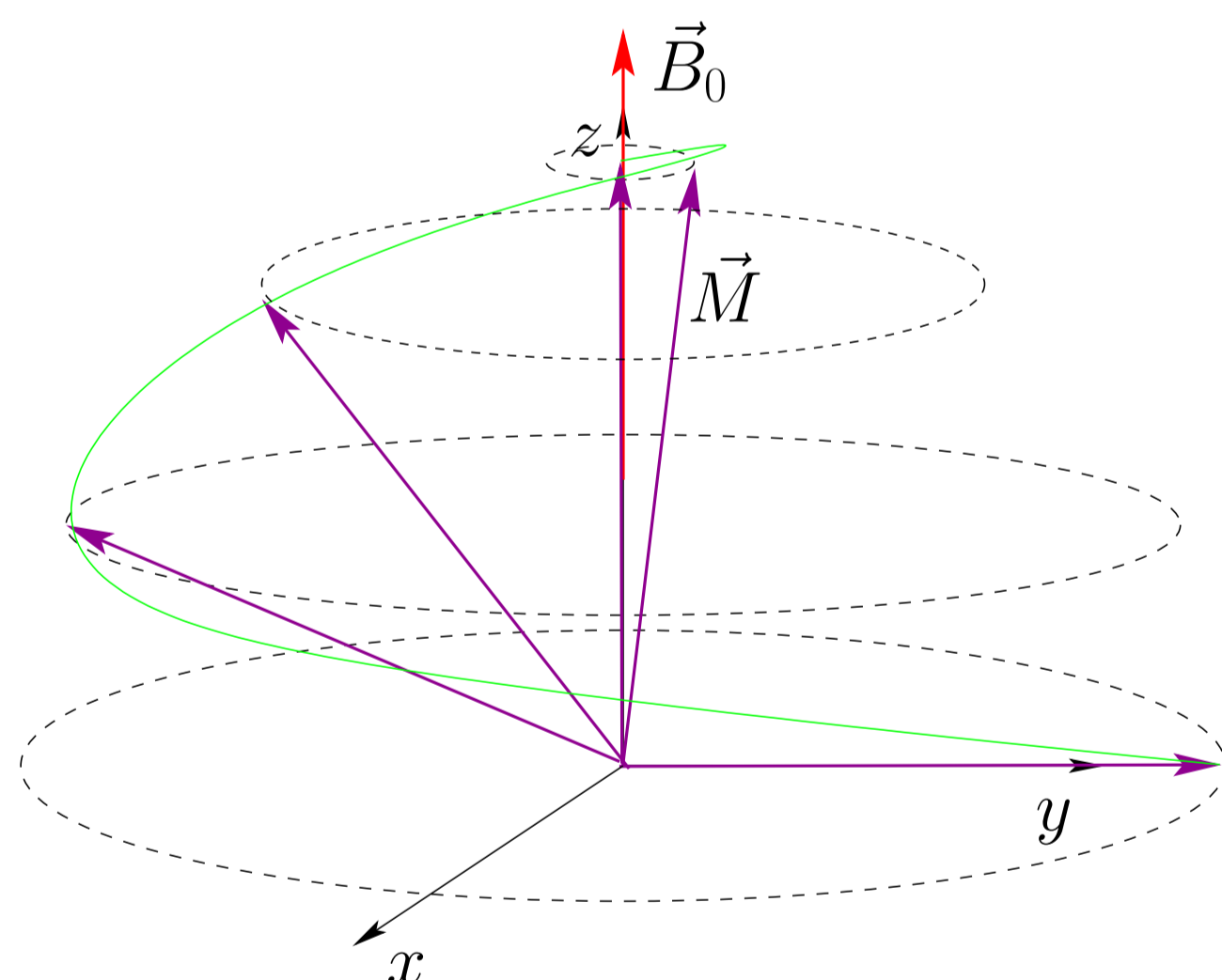


Fig. 12: Ritorno all'equilibrio per un impulso $\frac{\pi}{2}$.

- Dopo un impulso $\pi/2$ il **ritorno all'equilibrio** è controllato da:

- un tempo di rilassamento T_1 , chiamato **tempo di rilassamento longitudinale** per la componente z della magnetizzazione, che varia come

$$M_z(t) = M_0 (1 - e^{-t/T_1}).$$

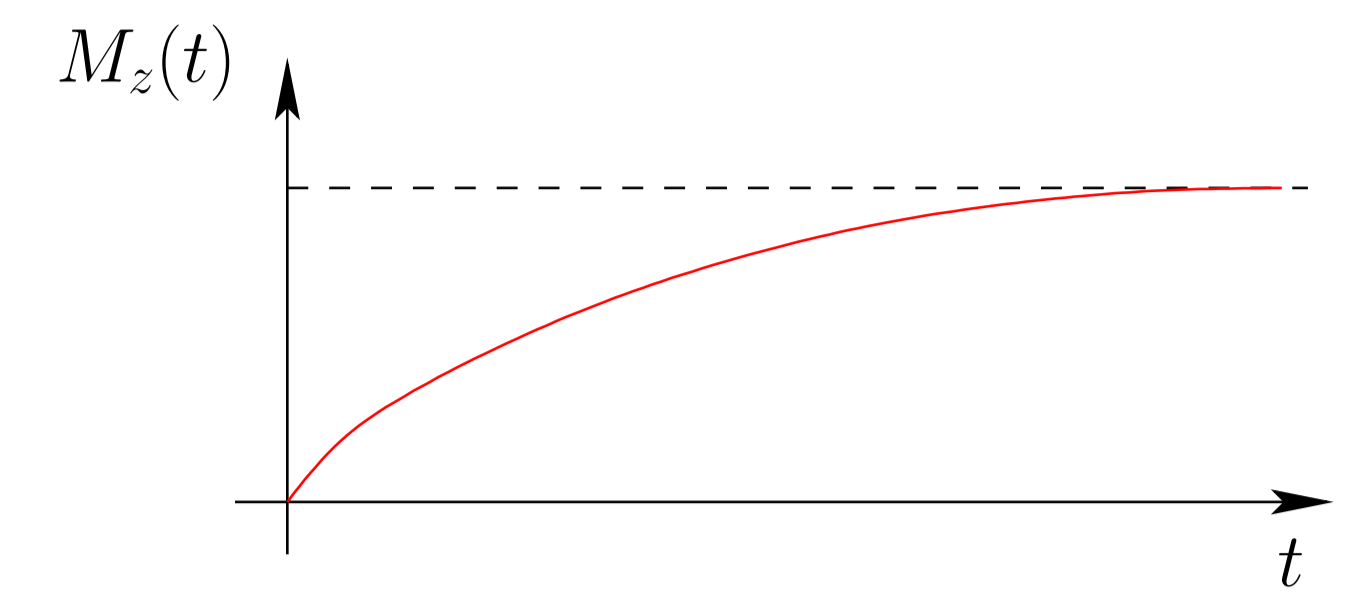


Fig. 13: Ritorno all'equilibrio della componente z della magnetizzazione.

Il fenomeno è riconducibile alla *perdita di energia dovuta all'interazione degli spin con l'ambiente*, al quale è ceduta energia per raggiungere l'equilibrio.

- un tempo di rilassamento T_2 , chiamato **tempo di rilassamento trasversale** per la componente nel piano xy della magnetizzazione, che varia come

$$M_{xy}(t) = M_0 e^{-t/T_2}$$

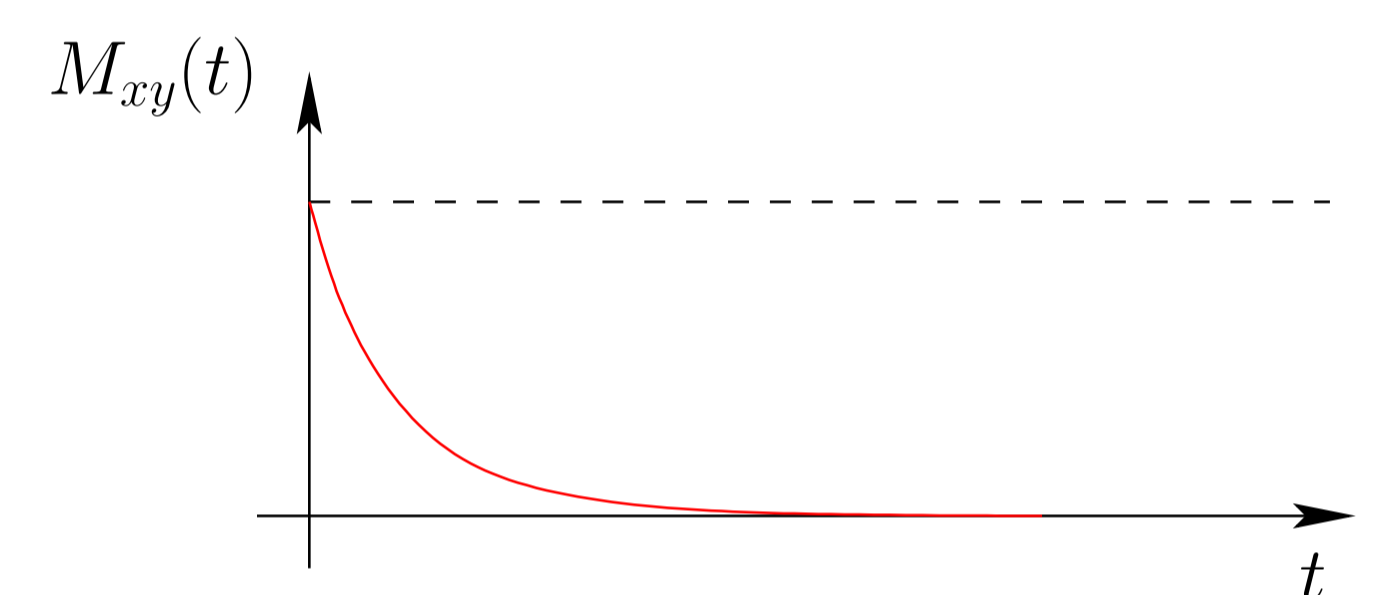


Fig. 14: Ritorno all'equilibrio della componente nel piano xy della magnetizzazione.

Il fenomeno è riconducibile all'interazione tra gli spin.

- In ogni caso **il ritorno all'equilibrio è caratterizzato dall'emissione di fotoni (onde EM)** di pulsazione ω_0 . L'analisi del segnale (chiamata Free Induction Decay – FID) permette di determinare ω_0 e quindi, conoscendo B_0 , di risalire a γ e poi g che è caratteristico di ogni nucleo.

- I tempi di rilassamento T_1 e T_2 sono molto sensibili al campione analizzato e permettono di determinare informazioni utili su di esso.

- Grazie alle informazioni ricavate dalla RMN è possibile analizzare diverse proprietà della materia, come pure studiare i composti biologici ed ottenerne immagini (IRM – **immagini per risonanza magnetica**). In quest'ultimo caso si sfrutta la grande presenza di acqua e quindi di nuclei di idrogeno ^1H nei campioni biologici.

Referenze

1. M. Le Bellac, *Physique quantique*, CNRS Editions (2003)
2. M. Le Bellac, *Introduction à l'information quantique*, Belin (2005)
3. C. Cohen-Tannoudji *et al.*, *Mécanique quantique I*, Hermann (1973)

4. C. Ferrari, *FAM: Fisica Quantistica*, LiLo (2007)
5. S.F. Keevil, *Magnetic resonance imaging in medicine*, Phys. Educ. **36**, 476-485 (2001)