FISICA

Serie 10: Soluzioni

II liceo

Esercizio 1 *Ciclo di Carnot*

Utilizziamo i due princìpi con l'ipotesi di processi reversibili:

$$\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q \qquad\qquad \mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T}\ ,$$

$\delta W = -\frac{Nk_BT}{V}\mathrm{d}V$ e $\mathrm{d}U = cNk_B\mathrm{d}T$ valevole per il gas ideale.

1. ①→②: $\mathrm{d}T = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}U = 0 \Longrightarrow \delta W = -\delta Q$

$$\Delta U = 0 \qquad W_{1\to 2} = -Nk_BT_f \ln\frac{V_2}{V_1} = -Q_{1\to 2};$$
$$\Delta S = \frac{\delta Q_{1\to 2}}{T_f} = Nk_B \ln\frac{V_2}{V_1}$$

②→③: $\delta Q = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}U = \delta W$

$$\Delta U = cNk_B(T_c - T_f) = W_{2\to 3} \qquad Q_{2\to 3} = 0 \qquad \Delta S = 0$$

③→④: $\mathrm{d}T = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}U = 0 \Longrightarrow \delta W = -\delta Q$

$$\Delta U = 0 \qquad W_{3\to 4} = -Nk_BT_c \ln\frac{V_4}{V_3} = \delta Q_{3\to 4};$$
$$\Delta S = \frac{\delta Q_{3\to 4}}{T_c} = Nk_B \ln\frac{V_4}{V_3}$$

④→①: $\delta Q = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}U = \delta W$

$$\Delta U = cNk_B(T_f - T_c) = W_{4\to 1} \qquad Q_{3\to 4} = 0 \qquad \Delta S = 0$$

Quindi sommando le contribuzioni di ogni parte del ciclo si ottiene

$$\Delta U_{ciclo} = 0 \qquad \Delta S_{ciclo} = 0 \qquad W_{\circlearrowleft} = -Q_{\circlearrowleft};$$
$$W_{\circlearrowleft} = -Nk_BT_f \ln\frac{V_2}{V_1} - Nk_BT_c \ln\frac{V_4}{V_3} = -Nk_B\left(T_f \ln\frac{V_2}{V_1} + T_c \ln\frac{V_4}{V_3}\right)$$

e utilizzando l'equazione per un'adiabatica $TV^{1/c} = \text{costante}$, si ha

$$\begin{cases} T_fV_2^{1/c} & = T_cV_3^{1/c} \\ T_fV_1^{1/c} & = T_cV_4^{1/c} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} T_f/T_c & = (V_3/V_2)^{1/c} \\ T_f/T_c & = (V_4/V_1)^{1/c} \end{cases} \Longrightarrow \frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1} \Longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_4}{V_3}$$

e quindi

$$W_{\circlearrowleft} = -Nk_B(T_c - T_f)\ln\frac{V_4}{V_3} < 0$$

2. Il rendimento è definito da $\eta = \frac{-W}{Q_c}$, quindi

$$\eta = \frac{-W_{\circlearrowleft}}{Q_{3\to 4}} = \frac{Nk_B(T_c - T_f)\ln\frac{V_4}{V_3}}{Nk_BT_c\ln\frac{V_4}{V_3}} = \frac{T_c - T_f}{T_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c}\,.$$

Esercizio 2 *Ciclo di Stirling*

1. In questo caso si ha $W_{\circlearrowleft} > 0$ poiché il ciclo è percorso in senso antiorario, il sistema riceve energia nella modalità lavoro: si tratta di una pompa di calore.

2. ①→②: $\mathrm{d}T = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}U = 0 \Longrightarrow \delta W = -\delta Q$

$$\begin{aligned}&\Delta U = 0 \qquad W_{1\to 2} = -Nk_BT_c\ln\frac{V_2}{V_1} = -Q_{1\to 2};\\ &\Delta S = \frac{\delta Q_{1\to 2}}{T_c} = Nk_B\ln\frac{V_2}{V_1}\end{aligned}$$

②→③: $\delta W = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}U = \delta Q$

$$\begin{aligned}&\Delta U = cNk_B(T_f - T_c) = Q_{2\to 3} \qquad W_{2\to 3} = 0;\\ &\Delta S = cNk_B\ln\frac{T_f}{T_c}\end{aligned}$$

③→④: $\mathrm{d}T = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}U = 0 \Longrightarrow \delta W = -\delta Q$

$$\begin{aligned}&\Delta U = 0 \qquad W_{3\to 4} = -Nk_BT_f\ln\frac{V_4}{V_3} = -Q_{3\to 4};\\ &\Delta S = Nk_B\ln\frac{V_4}{V_3}\end{aligned}$$

④→①: $\delta W = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}U = \delta Q$

$$\begin{aligned}&\Delta U = cNk_B(T_c - T_f) = Q_{4\to 1} \qquad W_{4\to 1} = 0;\\ &\Delta S = cNk_B\ln\frac{T_c}{T_f}\end{aligned}$$

Quindi sommando le contribuzioni di ogni parte del ciclo si ottiene

$$\begin{aligned}&\Delta U_{ciclo} = 0 \qquad \Delta S_{ciclo} = 0 \qquad W_{\circlearrowleft} = -Q_{\circlearrowleft};\\ &W_{\circlearrowleft} = -Nk_BT_c\ln\frac{V_2}{V_1} - Nk_BT_f\ln\frac{V_4}{V_3} = Nk_B(T_c - T_f)\ln\frac{V_1}{V_2} > 0\end{aligned}$$

poiché $V_1 = V_4$ e $V_2 = V_3$.

3. Invertendo il ciclo si ottiene una macchina termica.

Esercizio 3 *Macchine termiche e pompe di calore*

1. (a) Il rendimento di ogni macchina reversibile è $\eta_{\text{rev}} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$ da cui $\eta_{\text{rev}} = 0{,}34$ (ossia 34%).

   (b) Per definizione $\eta_{\text{rev}} = -W/Q_c$ quindi $W = -\eta_{\text{rev}} Q_c$ da cui

   $$W = -0{,}34 \cdot 80\,\text{J} = -27{,}5\,\text{J} \ .$$

   (c) In un ciclo $W + Q_c + Q_f = 0$ da cui $Q_f = -(W + Q_c)$ e quindi

   $$Q_f = -(-27{,}5\,\text{J} + 80\,\text{J}) = -52{,}5\,\text{J} \ .$$

2. $W = 5\,\text{kJ}$.

3. Abbiamo $\eta_{\text{rev}} = 0{,}15$ (ossia 15%) ed $\eta_{\text{irr}} = 0{,}05$ (ossia 3%). Ora Q_c è uguale in entrambi i casi, cambia il lavoro W, quindi

   $$\begin{cases} -W_{\text{rev}} & = \eta_{\text{rev}} Q_c \\ -W_{\text{irr}} & = \eta_{\text{irr}} Q_c \end{cases} \Longrightarrow \frac{-W_{\text{irr}}}{-W_{\text{rev}}} = \frac{\eta_{\text{irr}}}{\eta_{\text{rev}}} = \frac{0{,}03}{0{,}15} = 0{,}2$$

   Dunque $W_{\text{irr}} = 0{,}2 W_{\text{rev}}$ e nel caso irreversibile si perde l'60% dell'energia.

4. $$\eta_{\text{rev},1} = 0{,}27 \qquad\qquad \eta_{\text{rev},2} = 0{,}65 \ .$$

   Il rendimento aumenta aumentando la differenza di temperatura tra i bagni termici.

Esercizio 4 *Macchina termica ad un bagno termico*

1. Dai primi due principi abbiamo

   $$0 = \Delta U_{ciclo} = W + Q$$

   e

   $$0 = \Delta S_{ciclo} = \frac{Q}{T} + \underbrace{\Delta_i S_{ciclo}}_{=I}$$

2. Dalle due equazioni qui sopra possiamo scrivere

   $$W = -Q \qquad \text{e} \qquad -Q = TI \quad \Longrightarrow \quad W = TI > 0$$

   e quindi in un ciclo la macchina deve ricever energia dall'esterno e non può quindi fornire energia all'esterno.

3. Non è possibile avere una macchina termica funzionante con un solo bagno termico, sono necessari almeno due bagni termici a temperature T_c e T_f.