

---

# FISICA

Serie 11: Soluzioni

II liceo

---

## Esercizio 1 *Gas di van der Waals*

1. Dividendo per  $N$  a destra e sinistra abbiamo

$$\left(p + N^2 \frac{a}{V^2}\right) \left(\frac{V}{N} - b\right) = k_B T$$

da cui, sostituendo  $\rho = \frac{N}{V}$ ,

$$(p + a\rho^2) \left(\frac{1}{\rho} - b\right) = k_B T \implies (p + a\rho^2)(1 - \rho b) = \rho k_B T$$

e isolando  $p$  si ottiene

$$p = \rho k_B T \left(\frac{1}{1 - \rho b}\right) - a\rho^2$$

2. Sostituendo  $\frac{1}{1 - \rho b}$  con  $1 + \rho b$  abbiamo

$$p = \rho k_B T(1 - \rho b) - a\rho^2 \implies p = k_B T \rho + k_B T \left(b - \frac{a}{k_B T}\right) \rho^2$$

e per identificazione con  $p = \alpha_1 \rho + \alpha_2 \rho^2$  si ottiene il risultato voluto.

3. Abbiamo

$$b = \frac{2}{3} \pi (3,064 \cdot 10^{-10} \text{ m})^3 = 6,021 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$$

affinché  $\rho b \ll 1$  dobbiamo avere  $\rho \ll 1/b \sim 10^{28} \text{ m}^{-3}$ . Per esempio se in  $1 \text{ m}^3$  è contenuta una mole di argon ( $10^{23}$  particelle) l'approssimazione è corretta<sup>1</sup>.

4. Abbiamo

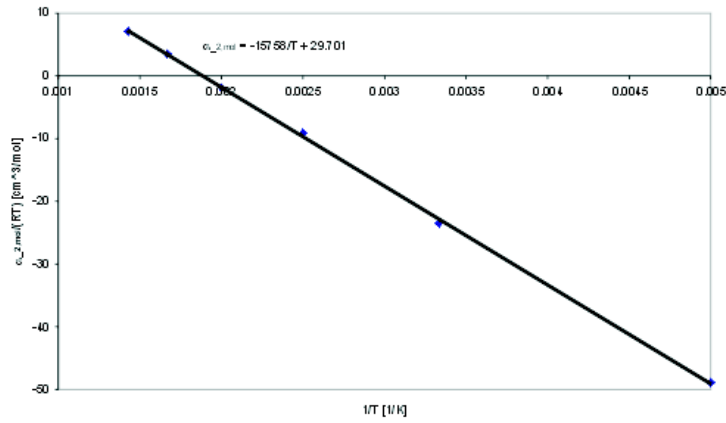
$$\left(p + N^2 \frac{a}{V^2}\right) (V - Nb) = N k_B T \implies \left(p + \frac{N^2}{N_A^2} \frac{aN_A^2}{V^2}\right) \left(V - \frac{N}{N_A} N_A b\right) = nRT$$

da cui

$$\left(p + n^2 \frac{a_{mol}}{V^2}\right) (V - nb_{mol}) = nRT$$

Per il resto si procede come sopra.

*Osservazione:*  $\rho_{mol} b_{mol} = \rho b$  e le condizioni di validità dell'approssimazione sono identiche nei due casi (come ci si deve aspettare).



5. Possiamo rappresentare graficamente  $\alpha_{2,mol}/(RT)$  in funzione di  $\frac{1}{T}$  otteniamo il grafico riportato qui sopra.

Per identificazione dell'equazione della retta passante per i punti e l'espressione  $\frac{\alpha_{2,mol}}{RT} = b_{mol} - \frac{a_{mol}}{RT}$  abbiamo

$$b_{mol} = 29,7 \text{ cm}^3/\text{mol} \quad \text{e} \quad a_{mol}/R = 15,79 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 \cdot \text{K}/\text{mol} \Rightarrow a_{mol} = 1,31 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{cm}^3/\text{mol}^2$$

da cui

$$a = 3,62 \cdot 10^{-49} \text{ J} \cdot \text{m}^3 \quad \text{e} \quad b = 4,93 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$$

Per il modello di Sutherland abbiamo

$$b = \frac{2}{3}\pi\sigma^3 \implies \sigma = 2,86 \text{ \AA}$$

$$a = \frac{2}{3}\pi\sigma^3\varepsilon = b\varepsilon \implies \varepsilon = 7,34 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

6. Dai dati sperimentali abbiamo che  $\frac{\alpha_{2,mol}}{\alpha_{1,mol}} \sim 10^{-5} \text{ m}^3/\text{mol}$  e quindi

$$\frac{\alpha_{2,mol}\rho_{mol}^2}{\alpha_{1,mol}\rho_{mol}} = \frac{\alpha_{2,mol}}{RT}\rho_{mol} \sim 10^{-5} \cdot 10^2 \sim 10^{-3} \ll 1$$

possiamo quindi concludere che per le temperature considerate

$$\alpha_{2,mol}\rho_{mol}^2 \ll \alpha_{1,mol}\rho_{mol}$$

ossia che il contributo alla pressione del termine proporzionale al quadrato della densità molare (ossia proporzionale a  $\rho_{mol}^2$ ) è molto più piccolo di quello proporzionale a  $\rho_{mol}$  (termine lineare). Questo mostra che per basse densità (alle temperature considerate) è possibile descrivere il gas come un gas ideale, infatti trascurando il termine  $\alpha_{2,mol}\rho_{mol}^2$  la pressione si scrive

$$p = \alpha_{1,mol}\rho_{mol} = RT \frac{n}{V} \implies pV = nRT$$

che è l'equazione del gas ideale (lo stesso argomento si poteva applicare utilizzando  $N$  invece di  $n$ ).

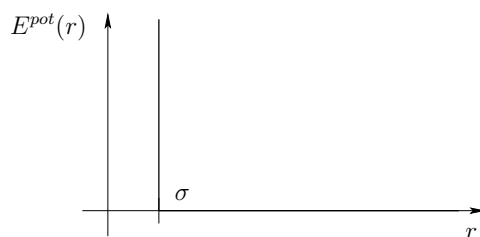
<sup>1</sup>In condizioni standard in  $1 \text{ m}^3$  il numero di particelle è dell'ordine di  $10^{25}$ .

In generale ad una data temperatura  $T$ , è possibile descrivere il gas come un gas ideale se

$$\alpha_2(T)\rho^2 \ll \alpha_1(T)\rho .$$

### Esercizio 2 *Gas di van der Waals*

1. Se consideriamo un modello in cui si prende in considerazione solo il volume proprio delle particelle l'energia d'interazione tra le particelle è nulla per ogni distanza  $r$  tra le particelle maggiore del diametro  $\sigma$  di quest'ultime. Inoltre i centri delle due particelle devono restare ad una distanza minima di  $\sigma$  (come nel modello di Sutherland), quindi abbiamo il grafico seguente:



2. Il parametro  $a$  è legato all'interazione del gas a lunga distanza, in questo modello semplificato si trascura quest'interazione e quindi  $a = 0$ .  $b = \frac{2}{3}\pi\sigma^3$  (vedi corso). In questo caso l'equazione di stato si scrive

$$p(V - Nb) = Nk_B T .$$

3.  $b = 6,021 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$  (vedi esercizio 1) e quindi

$$b_{mol} = bN_A = 6,021 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} = 36 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 .$$

### Esercizio 3 *Calore latente*

Da  $\delta Q = \mathcal{L}dm$  si ha

$$Q = \mathcal{L}_{g \rightarrow \ell} m = -2257 \text{ kJ/kg} \cdot 0,2 \text{ kg} = -4,52 \cdot 10^5 \text{ J} .$$

La variazione di entropia è

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{-4,52 \cdot 10^5 \text{ J}}{373 \text{ K}} = -1,21 \cdot 10^3 \text{ J/K} .$$

## Esercizio 4 *Calore latente*

Il ghiaccio dapprima aumenta la sua temperatura da  $T_{1,i}$  fino a  $0^\circ\text{C}$  poi fonde ed eventualmente la temperatura aumenta ancora fino a  $T_f$ . L'acqua calda passa dalla temperatura  $T_{2,i}$  alla temperatura  $T_f$ .

Il primo principio e l'estensività dell'energia permettono di scrivere per il sistema  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  (isolato)  $0 = \Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$  e trascurando il lavoro tra i due sottosistemi, che corrisponde a trascurare le variazioni di volume, abbiamo  $\Delta U_1 = Q_1$  e  $\Delta U_2 = Q_2$ . Considerando i calori specifici costanti possiamo scrivere

$$m_1 c_p(\text{gh})(273\text{ K} - T_{1,i}) + \mathcal{L}_{s \rightarrow \ell} m_1 + m_1 c_p(\text{aq})(T_f - 273\text{ K}) + m_2 c_p(\text{aq})(T_f - T_{2,i}) = 0$$

e quindi

$$T_f = \frac{-m_1 c_p(\text{gh})(273\text{ K} - T_{1,i}) - \mathcal{L}_{s \rightarrow \ell} m_1 + c_p(\text{aq})(m_1 273\text{ K} + m_2 T_{2,i})}{c_p(\text{aq})(m_1 + m_2)}$$

Sostituendo con i dati numerici otteniamo  $T_f = 280,2\text{ K}$ .

## Esercizio 5 *Una bevanda fresca*

1.+2. Calcoliamo il calore  $Q$  che corrisponde al raffreddamento dell'acqua fino a  $0^\circ\text{C}$

$$Q = mc_{\Delta}T = -2,2 \cdot 10^4\text{ J}$$

questa quantità permette di sciogliere una massa di ghiaccio pari a

$$m = \frac{-Q}{\mathcal{L}} = 0,066\text{ kg}$$

meno del ghiaccio iniziale. Possiamo quindi concludere che la temperatura finale di equilibrio è  $0^\circ\text{C}$ .

## Esercizio 6 *Equazione di Clausius-Clapeyron, regola delle fasi*

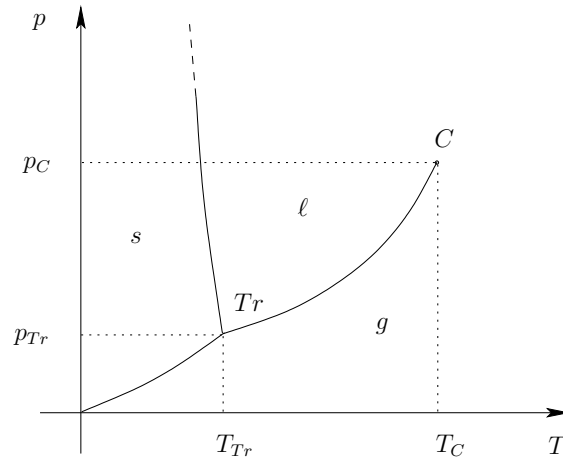
1. Abbiamo  $\rho_g < \rho_s < \rho_\ell$ .
2. Conoscendo il punto triplo e il punto critico, resta da determinare la pendenza delle linee di coesistenza di due fasi. Queste linee sono delle funzioni  $p(T)$  la cui pendenza  $\frac{dp}{dT}$  è data dall'equazione di Clausius-Clapeyron

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T} \frac{\mathcal{L}_{\alpha \rightarrow \beta}}{1/\rho_\beta - 1/\rho_\alpha} = \frac{1}{T} \frac{\mathcal{L}_{\alpha \rightarrow \beta}}{\rho_\alpha - \rho_\beta} \rho_\alpha \rho_\beta$$

quindi per il segno della pendenza è determinante il segno di  $\frac{\mathcal{L}_{\alpha \rightarrow \beta}}{\rho_{\alpha} - \rho_{\beta}}$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}_{s \rightarrow \ell}}{\rho_s - \rho_{\ell}} &< 0 \\ \frac{\mathcal{L}_{s \rightarrow g}}{\rho_s - \rho_g} &> 0 \\ \frac{\mathcal{L}_{\ell \rightarrow g}}{\rho_{\ell} - \rho_g} &> 0 \end{aligned}$$

da cui il diagramma  $pT$



3. Dalla regole delle fasi di Gibbs abbiamo  $\nu_{\text{intensive}} = n - f + 2$ , qui  $n = 1$  e quindi

$$\nu_{\text{intensive}} = 3 - f$$

- Per le regioni che corrispondono alle fasi pure (fase solida, liquida, gassosa)  $f = 1$  e  $\nu_{\text{intensive}} = 2$ : possiamo scegliere  $p$  e  $T$  in modo indipendente.
- Sulle linee di coesistenza di due fasi  $f = 2$  e quindi  $\nu_{\text{intensive}} = 1$ : possiamo scegliere  $T$  in modo indipendente, mentre  $p$  è una funzione  $p(T)$  (che corrisponde alla funzione disegnata nel diagramma  $pT$ ).
- Al punto triplo coesistono le tre fasi e  $f = 3$  quindi  $\nu_{\text{intensive}} = 0$ : esiste solo una coppia di valori di  $p$  e  $T$  per le quali si ha coesistenza.