FISICA

Serie 5: Soluzioni

II liceo

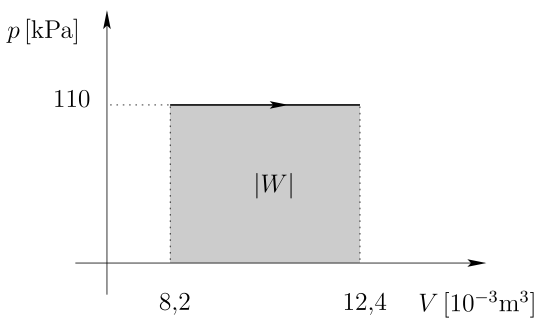
Esercizio 1 *Primo principio*

Ipotesi: Trattiamo il gas con il modello del gas ideale.

1. Dalla legge $U = cnRT$ otteniamo $U = 1{,}50 \cdot 10^4\,\mathrm{J}$.
2. Dal primo principio $\Delta U = Q + W$ abbiamo
$$Q = \Delta U - W = 6{,}48 \cdot 10^3\,\mathrm{J} - 560\,\mathrm{J} = 5{,}92\,\mathrm{kJ}.$$
3. Poiché $Q^{gas\to est} = -Q^{est\to gas}$ otteniamo in questo caso $Q = -5{,}92\,\mathrm{kJ}$.

Esercizio 2 *Trasformazione isobara*

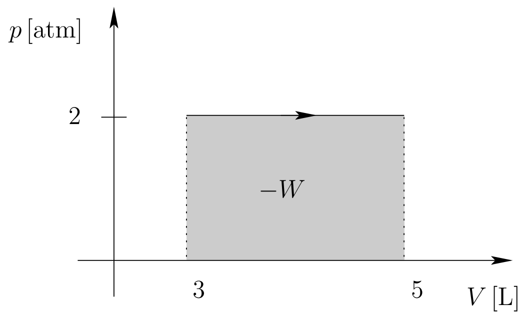
1. Il processo avviene alla pressione costante di $p = 110\,\mathrm{kPa}$.
2. **Se la pressione è costante** allora $W = -p\Delta V$ e quindi il primo principio si scrive
$$\Delta U = Q - p\Delta V$$
da cui nel primo caso $\Delta V = 0\,\mathrm{m}^3$ e nel secondo $\Delta V = 4{,}2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$.
Nel secondo caso potevamo prevedere $\Delta V > 0$, infatti ciò corrisponde ad un'espansione del gas, ossia ad un lavoro negativo (il gas cede energia).
3. Poiché il gas è mantenuto costantemente alla pressione $p = 110\,\mathrm{kPa}$ possiamo rappresentare la trasformazione nel diagramma pV come una retta orizzontale



4. L'area sotto la curva rappresenta il lavoro $|W|$.
Attenzione: L'area in generale rappresenta il valore assoluto $|W|$ del lavoro, il segno è + per una compressione (poiché in una compressione il gas riceve energia) mentre è − per una dilatazione in cui il gas spinge un pistone poiché esso perde energia che viene trasferita al pistone.

Esercizio 3 *Trasformazione isobara*

1. Graficamente si ottiene



2. $W = -2\,\mathrm{atm}(5\,\mathrm{L} - 3\,\mathrm{L}) = -2 \cdot 101{,}3\,\mathrm{kPa}\,2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 = -405{,}2\,\mathrm{J} < 0$. Si può esprimere il lavoro nel grafico $p(V)$ come l'area sotto la curva alla quale va aggiunto il segno $-$. (Nota la differenza rispetto all'esercizio precedente, in cui si tratta una compressione).

Esercizio 4 *Compressione isoterma di un gas ideale*

1. Se la compressione avviene molto lentamente (**processo quasi-statico**) la pressione del gas sarà sempre uguale alla pressione esercitata sul pistone per comprimere il gas. Infatti se consideriamo temporaneamente il pistone come sistema e la compressione è lentissima si può dire che il pistone è sempre vicinissimo ad una situazione di equilibrio meccanico per la quale

$$\vec{F}^{gas\to pistone} + \vec{F}^{esterno\to pistone} \simeq \vec{0} \Longrightarrow F^{gas\to pistone} \simeq F^{esterno\to pistone}$$

   da cui, utilizzando $p = \frac{F}{S}$, si ottiene $p_{gas} = p_{esterna}$.

2. La compressione del gas avviene tramite l'azione di una forza esterna (notare che quindi *il sistema non è isolato*) di intensità F, che visto la compressione infinitesimale può essere supposta *costante*. Notiamo che la compressione $V \to V - \mathrm{d}V$ corrisponde ad una diminuzione della lunghezza del cilindro $x \to x - \mathrm{d}x$.

   In questo caso abbiamo (notiamo δW il lavoro svolto dalla forza esterna per una compressione piccolissima)

$$\delta W = F\mathrm{d}x = \frac{F}{S}S\mathrm{d}x > 0$$

   ora $|S\mathrm{d}x|$ è uguale a $|\mathrm{d}V|$ e siccome il volume diminuisce avremo $\mathrm{d}V < 0$, utilizzando $p = \frac{F}{S}$ (ciò che riviene a supporre p, ipotesi valida vista la compressione piccolissima), possiamo quindi scrivere

$$\delta W = -p\mathrm{d}V > 0$$

3. Per un gas ideale $p = \frac{Nk_BT}{V}$ da cui

$$\delta W = -\frac{Nk_BT}{V}\mathrm{d}V$$

4. Abbiamo[1]

$$W = -Nk_BT\ln\left(\frac{V/2}{V}\right) = Nk_BT\ln 2$$

5. Dal primo principio abbiamo $\Delta U = W+Q$, ma per una compressione isoterma di un gas ideale $\Delta U = 0$ e quindi $Q = -W$, dunque $Q = -Nk_BT\ln 2$.

Esercizio 5 *Trasformazione isoterma*

1. Se il gas si espande liberamente non compie nessun lavoro (praticamente non spinge nulla), quindi $W = 0$: questo risultato vale in generale (e non unicamente per i processi isotermici).

2. In questo caso sappiamo che $W < 0$ ed utilizzando il risultato trovato sopra

$$W = -Nk_BT\ln\frac{V_f}{V_i}$$

otteniamo $W = -Nk_BT\ln 3$, da cui visto che $\Delta T = 0 \Longrightarrow \Delta U = 0$ dal primo principio si ha $Q = -W = Nk_BT\ln 3$.

3. In questo caso $W > 0$ e vale $W = Nk_BT\ln 3$.

Esercizio 6 *Calore da fornire*

1. Il lavoro vale

$$W = -nRT\ln\frac{V_f}{V_i} = -0{,}5\,\mathrm{mol}8{,}31\,\mathrm{J/(mol\cdot K)}310\,\mathrm{K}\ln\frac{0{,}45\,\mathrm{m}^3}{0{,}31\,\mathrm{m}^3} = -480\,\mathrm{J}$$

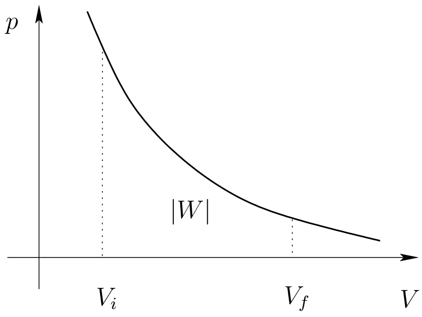
e $\Delta U = 0$. Da cui utilizzando il primo principio $\Delta U = Q + W$ otteniamo $Q = 480\,\mathrm{J}$.

2. L'equazione dei gas ideali $pV = nRT$ da (omettendo le unità d misura) l'equazione di un'iperbole

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{1246{,}5}{V}$$

da cui il grafico seguente

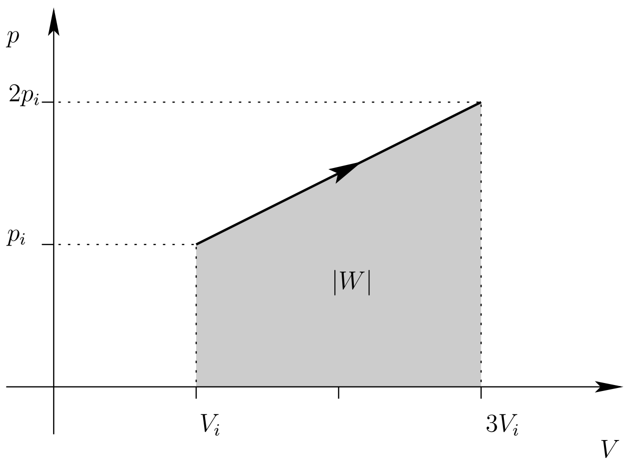
[1]Notiamo che la pressione, e quindi la forza, non è costante durante il processo.



Il valore assoluto del lavoro $|W|$ corrisponde all'area nel grafico pV.

Esercizio 7 W, ΔU e Q

1. Otteniamo



2. Calcolando l'area otteniamo $W = -3p_iV_i$,

3. $\Delta U = \frac{3}{2}nR(T_f - T_i)$, dove utilizzando le equazioni del gas ideale possiamo scrivere

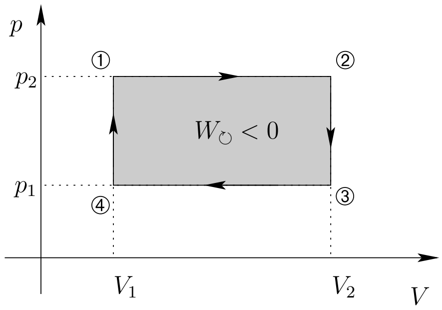
$$T_i = \frac{p_iV_i}{nR} \quad \text{e} \quad T_f = \frac{p_fV_f}{nR} = \frac{2p_i3V_i}{nR} \quad \Longrightarrow \quad \Delta T = \frac{5p_iV_i}{nR}$$

da cui $\Delta U = \frac{15}{2}p_iV_i$,

4. dal primo principio $\Delta U = Q + W$ otteniamo $Q = \frac{21}{2}p_iV_i$, il sistema riceve energia nella modalità calore.

Esercizio 8 *Trasformazione isobara + isocora*

1. Graficamente si ottiene



2. Ciclo ① → ② → ③ → ④ → ①

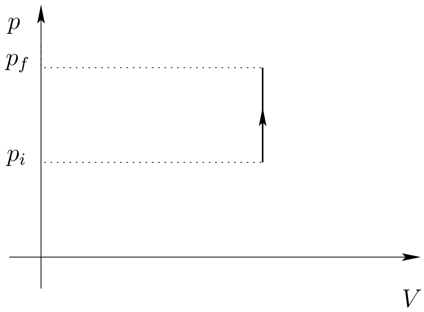
$$\begin{aligned} W_{\circlearrowright} &= W_{1\to2} + W_{2\to3} + W_{3\to4} + W_{4\to1} \\ &= 0 + [-p_2(V_2 - V_1)] + 0 + [-p_1(V_1 - V_2)] = (p_1 - p_2)(V_2 - V_1) < 0. \end{aligned}$$

   Si può esprimere il lavoro nel grafico $p(V)$ come l'area sotto la curva alla quale va aggiunto il segno $-$, ciò è dovuto al fatto che il ciclo è percorso in *senso orario.*

3. Poiché la trasformazione è ciclica, e quindi $U_{in} = U_{fin}$, si ha $\Delta U = 0$. Dal primo principio $\Delta U = Q + W$ otteniamo $Q_{\circlearrowright} = -W_{\circlearrowright}$.

Esercizio 9 *Trasformazione isocora*

1. Abbiamo



2. Poiché $\mathrm{d}V = 0$ si ha $W = 0$.

3. Per determinare Q utilizziamo il primo principio che, visto il punto precedente, si riduce a $\Delta U = Q$, ora $\Delta U = \frac{3}{2} N k_B (T_f - T_i)$ e le temperature iniziale e finale si determina con l'equazione dei gas ideali. Si ottiene $Q = 151{,}5\,\mathrm{J}$.

Esercizio 10 *Ordina*

1. $|W|_4 > |W|_3 > |W|_2 > |W|_1$ (utilizzando l'area),
2. tutti uguali, infatti U è una grandezza di stato e ΔU dipende unicamente dagli stati iniziale e finale e non dal processo,
3. utilizzando il primo principio otteniamo $|Q|_4 > |Q|_3 > |Q|_2 > |Q|_1$.

Esercizio 11 *Trova* ΔT

1. Il calore scambiato in questo processo è positivo. Infatti se il gas si espande $W < 0$ e inoltre da $pV = Nk_BT$ si ottiene un'aumento di temperatura, ciò che può avvenire unicamente se $Q > 0$ (poiché $W < 0$).
2. Dalla legge dei gas ideali si trovano T_i e T_f da cui $\Delta T = 6{,}99\,\mathrm{K}$.
3. Dal primo principio si ottiene $Q = \Delta U + p\Delta V$ da cui $Q = 290\,\mathrm{J}$.