FISICA

Serie 6: Soluzioni

II liceo

Esercizio 1 *Coefficienti termodinamici per il gas ideale*

Dall'equazione di stato dei gas ideali $pV = Nk_BT$ possiamo scrivere

$$p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = Nk_B\mathrm{d}T$$

1. Visto l'ipotesi di dilatazione **isobara** $\mathrm{d}p = 0$ si ha

   $$p\mathrm{d}V = Nk_B\mathrm{d}T \Longrightarrow \mathrm{d}V = \frac{Nk_B}{p}\mathrm{d}T \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = \frac{Nk_B}{p} = \frac{V}{T}$$

   e utilizzando la definizione di β_p abbiamo

   $$\mathrm{d}V = \beta_p V\mathrm{d}T \Longrightarrow \beta_p = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}$$

   comparando le due equazioni $\beta_p = \frac{1}{T} > 0$.

2. Visto l'ipotesi di compressione **isoterma** $\mathrm{d}T = 0$ si ha

   $$p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p} = -V\frac{1}{p}$$

   e utilizzando la definizione di κ_T abbiamo

   $$\mathrm{d}V = -\kappa_T V\mathrm{d}p \Longrightarrow \kappa_T = -\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}$$

   comparando le due equazioni $\kappa_T = \frac{1}{p} > 0$.

Osservazione: come per i calori specifici c_p e c_V, anche i coefficienti termodinamici β_p e κ_T sono strettamente positivi. Questa è una caratteristica generale dei coefficienti termodinamici.

Esercizio 2 *Calore specifico per i solidi: legge di Dulong-Petit*

1. Abbiamo $\delta Q_V = mc_V\mathrm{d}T$ e dal primo principio in cui si ha unicamente lavoro di compressione uniforme ($\delta W = -p\mathrm{d}V$)

   $$\mathrm{d}U = \delta Q - p\mathrm{d}V \Longrightarrow \mathrm{d}U = \delta Q_V$$

   poiché consideriamo un processo isocoro ($V =$ costante). Quindi

   $$\mathrm{d}U = mc_V\mathrm{d}T\ .$$

Ora vista la relazione $U = 3Nk_BT$ possiamo scrivere

$$\mathrm{d}U = 3Nk_B\mathrm{d}T$$

da cui si ottiene la **legge di Dulong-Petit**

$$c_V = 3k_B\frac{N}{m} = 3N_Ak_B\frac{N}{N_Am} = 3R\frac{n}{m} \Longrightarrow c_V = 3\frac{R}{M} \ .$$

2. Per il ferro (Fe) abbiamo $M = 55{,}85\,\mathrm{g/mol}$ e per il carbonio (C) $M = 12{,}01\,\mathrm{g/mol}$ da cui per l'acciaio $M = 55{,}5\,\mathrm{g/mol}$ e quindi $c_V = 0{,}45{\cdot}10^3\,\mathrm{J/(kg\cdot K)}$. Dunque $Q = mc_V\Delta T = 2{,}24\cdot 10^4\,\mathrm{J}$.

Esercizio 3 *Calore specifico*

1. Utilizzando la relazione di Mayer abbiamo $c_V = c_p - R/M$ da cui

$$c_V = 1\,\mathrm{J/(g\cdot K)} - \frac{8{,}31\,\mathrm{J/(mol\cdot K)}}{29\,\mathrm{g/mol}} = 0{,}71 J/(g\cdot K)$$

2. Abbiamo $Q_x = mc_x\Delta T$, dove $x = V$ o $x = p$. Ora vista la relazione di Mayer

$$c_p = c_V + R/M \Longrightarrow c_p > c_V$$

da cui

$$Q_p > Q_V \ ,$$

è quindi necessario fornire più calore se il processo avviene a pressione costante. Abbiamo

$$\begin{aligned} Q_V = mc_V\Delta T \quad &\Longrightarrow \quad Q_V = 10\,\mathrm{g}0{,}71\,\mathrm{J/(g\cdot K)}10\,\mathrm{K} = 71\,\mathrm{J} \\ Q_p = mc_p\Delta T \quad &\Longrightarrow \quad Q_V = 10\,\mathrm{g}1\,\mathrm{J/(g\cdot K)}10\,\mathrm{K} = 100\,\mathrm{J} \ . \end{aligned}$$

Esercizio 4 *Equilibrio termico*

1. Il sistema $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ è isolato e quindi $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = Q^{2\to 1} + Q^{1\to 2} = 0$ da cui, esprimendo Q con il calore specifico a volume costante si ottiene

$$m_1c_V(T_f - T_1) = -m_1c_V(T_f - T_2)$$

ora $m = Mn$ da cui

$$T_f = \frac{n_2T_2 + n_1T_1}{n_1 + n_2} = 248{,}18\,\mathrm{K}$$

2. Stessa strategia del punto precedente.