FISICA

Serie 9: Soluzioni

II liceo

Esercizio 3 *Processo adiabatico non quasi-statico*

1. Se grandezze termodinamiche sono definite *solo* nello stato iniziale e nello stato finale.

2. Sia S la sezione (=area di base) del cilindro. La pressione finale è data dalla massa che comprime il gas quindi
$$p = \frac{(m+m_0)g}{S}$$

3. Il sistema è adiabaticamente chiuso e quindi $Q = 0$, dunque avremo $\Delta U = W$. Il lavoro è dato $W = F^{est}\Delta x$ (perché la forza è costante) e quindi
$$W = (m+m_0)g\Delta h \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta U = (m+m_0)g\Delta h$$

4. Per calcolare la temperatura finale abbiamo a disposizione due possibilità:

   - l'equazione del gas ideale ci dà
   $$p_0V_0 = Nk_BT_0 \qquad \text{con} \qquad p_0 = \frac{m_0g}{S}, V_0 = hS \Longrightarrow N = \frac{m_0gh}{k_BT_0}$$
   e
   $$pV = Nk_BT \qquad \text{con} \qquad p = \frac{(m+m_0)g}{S}, V = (h-\Delta h)S$$
   da cui
   $$T = T_0\frac{(m+m_0)(h-\Delta h)}{m_0h} \tag{1}$$

   - il primo principio e l'equazione $U = \frac{3}{2}Nk_BT$ ci danno
   $$\Delta U = \tfrac{3}{2}Nk_B\Delta T = (m+m_0)g\Delta h$$
   da cui
   $$\Delta h = \frac{3}{2}\frac{m_0h}{T_0(m+m_0)}(T-T_0) \tag{2}$$

   Risolvendo il sistema (1)+(2) si trova la temperatura finale
   $$T = \left(\frac{2m}{5m_0}+1\right)T_0$$
   e il volume finale grazie a
   $$\Delta h = \frac{3mh}{5(m+m_0)} \Longrightarrow V = Sh\left(1-\frac{3m}{5(m+m_0)}\right)$$

5. Lo stato iniziale (U_0,V_0,N_0) e lo stato finale (U,V,N) sono conosciuti (U si trova via T) e si ha $N = N_0$, possiamo quindi calcolare la variazione di entropia che vale

$$\begin{aligned}\Delta S &= Nk_B \ln\left[\left(\frac{U}{U_0}\right)^{3/2} \frac{V}{V_0}\right] = Nk_B \ln\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \frac{h-\Delta h}{h}\right] \\ &= Nk_B \ln\left[\left(\frac{2m}{5m_0}+1\right)^{3/2} \frac{2m+5m_0}{5(m+m_0)}\right]\end{aligned}$$

- caso $m = \frac{1}{2}m_0$: $\Delta S = Nk_B \ln 1{,}05 > 0$
- caso $m = 2m_0$: $\Delta S = Nk_B \ln 1{,}45 > 0$

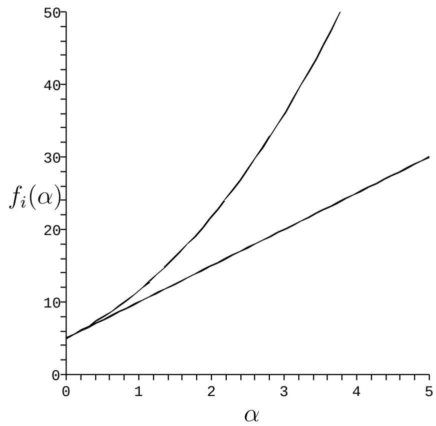
In generale poniamo $m = \alpha m_0$ con $\alpha > 0$, allora

$$\Delta S = Nk_B \ln\left[\left(\frac{2}{5}\alpha+1\right)^{3/2} \frac{2\alpha+5}{5(\alpha+1)}\right]$$

per dimostrare che $\Delta S > 0$ bisogna dimostrare che $\left(\frac{2}{5}\alpha+1\right)^{3/2} \frac{2\alpha+5}{5(\alpha+1)} > 1$ ossia

$$\underbrace{(1/5)^{3/2}(2\alpha+5)^{5/2}}_{=f_1(\alpha)} > \underbrace{5(\alpha+1)}_{=f_2(\alpha)}$$

possiamo disegnare le funzioni $f_1(\alpha)$ e $f_2(\alpha)$ e verificare la disuguaglianza. Abbiamo: curva $= f_1(\alpha)$, retta $= f_2(\alpha)$ e sappiamo che $f_1(0) = f_2(0) = 5$



Abbiamo quindi $\Delta S > 0$, ed essendo un *sistema adiabaticamente chiuso* ($\delta Q = 0$), sappiamo che la variazione di entropia è dovuta ad una produzione interna di entropia $\delta_i S > 0$, il processo è quindi *irreversibile*.

Complemento

Se consideriamo l'evoluzione precedente come una successione di L tappe, in cui in ogni tappa di aggiunge una massa $\frac{m}{L}$ alla massa precedente che vale $m_0 + (i-1)\frac{m}{L}$, dove $i = 1, \ldots, L$ indica la tappa considerata, allora possiamo calcolare la differenza di entropia nella $i$esima tappa sostituendo

$$m \to \frac{m}{L} \qquad \text{e} \qquad m_0 \to m_0 + (i-1)\frac{m}{L}$$

si ha quindi[1] $(1 \leq i \leq L)$

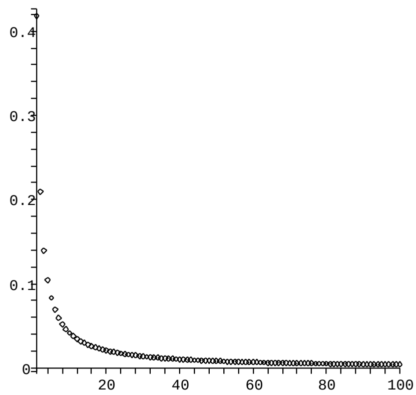
$$\Delta S_i = N k_B \ln \left[\left(\frac{2\frac{m}{L}}{5\left(m_0 + (i-1)\frac{m}{L}\right)} + 1 \right)^{3/2} \frac{2\frac{m}{L} + 5(m_0 + (i-1)\frac{m}{L})}{5(\frac{m}{L} + m_0 + (i-1)\frac{m}{L})} \right]$$

Visto che ogni tappa è un processo simile a quello studiato sopra sappiamo che ogni $\Delta S_i > 0$ da cui la variazione di entropia nell'insieme delle L tappe da

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{L} \Delta S_i > 0$$

ed il processo è ancora *irreversibile.*
Se L diventa grandissimo, ossia il processo avviene passando da un numero grandissimo di stati di equilibrio allora il processo diventa *quasi-statico*, ma sempre *irreversibile* poiché avremo sempre $\Delta S > 0$.

Possiamo rappresentare graficamente la differenza di entropia ΔS in funzione del numero di tappe L, prendiamo $N = N_A$, $m = \frac{1}{2}m_0$ otteniamo



dove vediamo che $L = 1$ corrisponde alla situazione studiata sopra. Possiamo constatare che quando L cresce la variazione di entropia diminuisce, ma si ottiene $\Delta S = 0$ solo quando il numero di tappe diventa infinito

$$\lim_{L \to \infty} \Delta S(L) = 0$$

[1] Questo risultato lo si ottiene anche nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \Delta S_i &= S_i - S_{i-1} = S_0 + N k_B \ln \left[\left(\frac{U_i}{U_0} \right)^{3/2} \frac{V_i}{V_0} \right] - \left\{ S_0 + N k_B \ln \left[\left(\frac{U_{i-1}}{U_0} \right)^{3/2} \frac{V_{i-1}}{V_0} \right] \right\} \\ &= N k_B \ln \left[\left(\frac{U_i}{U_{i-1}} \right)^{3/2} \frac{V_i}{V_{i-1}} \right] \end{aligned}$$

ciò corrisponde ad aggiungere delle masse la cui massa tende a zero, ossia $\frac{m}{L} \rightarrow 0$. Supponendo che l'entropia delle masse aggiunte non cambia ($\Delta S^{est} = 0$), ipotesi corretta vista l'assenza d'attrito[2], nel limite $L \rightarrow \infty$, si ha un processo reversibile poiché per il sistema *isolato* gas + masse/pistone si ha $\Delta S^{tot} = 0$: il processo reversibile è quindi il processo quasi-statico in cui si passa da un infinità di stati di equilibrio[3].

Esercizio 4 *Processo adiabatico quasi-statico e reversibile*

Si riutilizzano i risultati dell'esercizio precedente trovati con l'equazione dei gas ideali, con la quale abbiamo dimostrato che

$$T = T_0 \frac{(m+m_0)(h-\Delta h)}{m_0 h} \tag{3}$$

1. Dall'equazione $pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma$ abbiamo

$$(m+m_0)(h-\Delta h)^\gamma = m_0 h^\gamma$$

   da cui

$$\Delta h = h - \left(\frac{m_0 h^\gamma}{m+m_0}\right)^{1/\gamma} \tag{4}$$

   Risolvendo il sistema (3)+(4) si trova la temperatura finale

$$T = \left(1+\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_0$$

   e il volume finale grazie a

$$\Delta h = \left(1 - \left(1+\frac{m}{m_0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right) h \Longrightarrow V = Sh\left(1+\frac{m}{m_0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}$$

   Lo stato iniziale (U_0,V_0,N_0) essendo conosciuto conosciamo anche lo stato finale (U,V,N) (U si trova via T) e si ha $N = N_0$.

2. Lo stato iniziale (U_0,V_0,N_0) e lo stato finale (U,V,N) sono conosciuti, possiamo quindi calcolare la variazione di entropia che vale

$$\begin{aligned} \Delta S &= N k_B \ln\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \frac{V}{V_0}\right] = N k_B \ln\left[\left(1+\frac{m}{m_0}\right)^{3/5}\left(1+\frac{m}{m_0}\right)^{-3/5}\right] \\ &= N k_B \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

   Abbiamo quindi verificato che $\Delta S = 0$, ed essendo un *sistema adiabaticamente chiuso* ($\delta Q = 0$), sappiamo che la variazione di entropia può essere unicamente positiva o nulla e dovuta ad una produzione interna di entropia $\delta_i S > 0$, in

[2]Le masse sono considerate dei sistemi meccanici e dimostreremo che l'entropia per i sistemi meccanici adiabaticamente chiusi varia a causa delle forze d'attrito.

[3]Attenzione: non pensare che si ha sempre un processo reversibile quando si hanno un infinità di tappe, questo non è vero in generale!

questo caso dunque $\delta_i S = 0$: non vi è produzione di entropia all'interno del sistema. Considerato il fatto che abbiamo supposto una trasformazione *reversibile* potevamo già aspettarci $\Delta S = 0$, infatti

$$\text{trasformazione reversibile per un sistema adiabaticamente chiuso} \Longrightarrow \Delta S = 0$$

ma ricordiamo che $\Delta S = 0$ (per un sistema adiabaticamente chiuso) non implica la reversibilità.

Esercizio 5 *Radiazione cosmica di fondo*

1. Supponendo un'espansione isentropica[4], tra due stati di equilibrio abbiamo $\Delta S = S_f - S_i = 0$ da cui (utilizzando $V_f = 2V_i$)

$$S(U_f,V_f) = S(U_i,V_i) \Longrightarrow V_f T_f^3 = V_i T_i^3 \Rightarrow 2T_f^3 = T_i^3 \Longrightarrow T_f = \frac{2{,}7\,\mathrm{K}}{2^{1/3}} = 2{,}1\,\mathrm{K}$$

2. Se tra 10000 anni si misurasse una temperatura di 4,7 K, questo è un segno che l'universo si sta contraendo, poichè $V_i T_i^3 = V_f T_f^3$.

[4]Questa è una predizione non evidente scaturita da un calcolo utilizzando un modello cosmologico appropriato.