FISICA

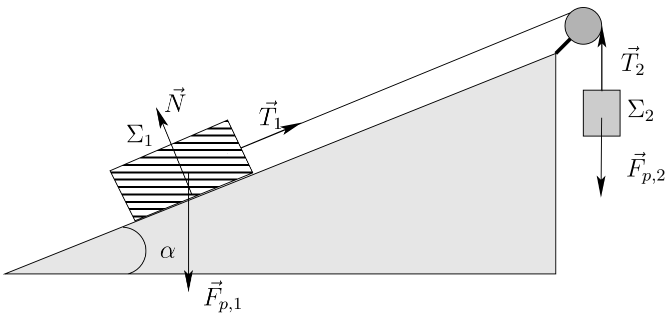
Serie 13: Soluzioni

II liceo

Esercizio 1 *Sistemi collegati*

Premessa: Per un cavo di massa trascurabile che scorre su una puleggia senza attrito la tensione cambia direzione e verso ma non intensità, quindi $T_1 = T_2 = T$ (vedi disegno).

È utile fare un disegno delle forze



1. Poiché i due blocchi si muovono assieme, il valore della loro accelerazione è uguale $a_1 = a_2 = a$. Applicando la seconda legge di Newton al sistema Σ_2 otteniamo $F_{p,2} - T = m_2 a$, mentre applicata al sistema Σ_1 considerando la direzione del moto abbiamo $-F_{p,1} \sin\alpha + T = m_1 a$ da cui

$$a = \frac{m_2 g - m_1 g \sin\alpha}{m_1 + m_2} = 0{,}735\,\mathrm{m/s^2}\ .$$

2. Dalla seconda legge di Newton applicata al sistema Σ_2 otteniamo $T = 20{,}87\,\mathrm{N}$.

3. Se il moto è a velocità costante allora $a = 0$ e dalla seconda legge di Newton applicata al sistema Σ_2 otteniamo $T = F_{p,2}$. Mentre se applicata al sistema Σ_1 otteniamo

$$-F_{p,1} \sin\alpha + T - F_{atr} = 0$$

da cui $F_{atr} = (m_2 - m_1 \sin\alpha) g = 4{,}41\,\mathrm{N}$.

4. $\mu_c = 0{,}14$.

Esercizio 2 *Posizione, spostamento e velocità media in 3D*

1. Per definizione $\Delta\vec{x}(t_i;t_f) = \vec{x}(t_f) - \vec{x}(t_i)$. Abbiamo

$$\Delta\vec{x} = \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{m} \\ -3\,\mathrm{m} \\ 6\,\mathrm{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,\mathrm{m} \\ -4\,\mathrm{m} \\ 0\,\mathrm{m} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1\,\mathrm{m} \\ x_2\,\mathrm{m} \\ x_3\,\mathrm{m} \end{pmatrix} = \vec{x}(t_f) - \vec{x}(t_i)$$

   da cui

$$\vec{x}(t_i) = \begin{pmatrix} 1\,\mathrm{m} \\ -1\,\mathrm{m} \\ -6\,\mathrm{m} \end{pmatrix} = 1\,\mathrm{m}\,\vec{e}_1 - 1\,\mathrm{m}\,\vec{e}_2 - 6\,\mathrm{m}\,\vec{e}_3\ .$$

2. Per definizione $\vec{v}_m(t_i;t_f) = \dfrac{\Delta x(t_i;t_f)}{\Delta t}$ da cui

$$\vec{v}_m(2\,\mathrm{s};7\,\mathrm{s}) = \begin{pmatrix} 0{,}29\,\mathrm{m/s} \\ -0{,}43\,\mathrm{m/s} \\ -0{,}86\,\mathrm{m/s} \end{pmatrix} = 0{,}29\,\mathrm{m}\,\vec{e}_1 - 0{,}43\,\mathrm{m/s}\,\vec{e}_2 - 0{,}86\,\mathrm{m/s}\,\vec{e}_3$$

3. L'energia cinetica è definita come

$$E^{cin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2}m(\vec{v}\cdot\vec{v})$$

   ma $v = \|\vec{v}\| = 1{,}96\,\mathrm{m/s}$ e quindi $E^{cin} = 4{,}9\,\mathrm{J}$.

Esercizio 3 *MUA e balistica*

1. Utilizzando la proiezione sugli assi tramite il sin e il cos, si ottiene

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0\cos\alpha \\ v_0\sin\alpha \end{pmatrix} = v_0\cos\alpha\,\vec{e}_1 + v_0\sin\alpha\,\vec{e}_2$$

   dove $v_0 = \|\vec{v}_0\|$.

2. Utilizzando la formula del MUA per il vettore $\vec{x}(t)$ scomposta sugli assi x e y si ottiene

$$\begin{cases} x: & x(t) = x_0 + v_0\cos\alpha(t-t_0) \\ y: & y(t) = y_0 + v_0\sin\alpha(t-t_0) - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2 \end{cases}$$

   .

3. Dalla componente x si ottiene

$$(t-t_0) = \frac{x-x_0}{v_0\cos\alpha}$$

   da cui

$$y(x) = y_0 + (x-x_0)\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{\cos^2\alpha}\frac{(x-x_0)^2}{v_0^2}$$

   utilizzando la condizione iniziale $x_0 = y_0 = 0$ si ottiene il risultato cercato.

4. La curva descrive l'equazione cartesiana trovata nel punto precedente descrive una parabola ($y = ax^2$) ed il **moto** è detto **parabolico**.

5. La gittata D si ottiene ponendo $y(D) = 0$, da cui (si scarta chiaramente la soluzione $D = 0$)

$$D = \frac{2(v_0 \cos\alpha)^2}{g} \tan\alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$$

6. si ha $D_{\max}$ per $\alpha = 45°$, che vale

$$D_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \ .$$

7. Nel punto più alto della traiettoria si ha $\vec{v} = v_0 \cos\alpha \vec{e}_2$ e quindi $E^{mec} = mgh + \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2\alpha$, ora inizialmente $E^{mec} = \frac{1}{2} m v_0^2$ da cui

$$h = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} \ .$$

Il valore massimo lo si ottiene per $\alpha = 90°$, e si ha

$$h_{\max} = \frac{1}{2} D_{\max} \ .$$

Esercizio 4 *Balistica*

Si utilizzano i risultati dell'esercizio precedente.

1. Si calcola $y(5{,}5\,\mathrm{s})$ e si trova $H = 51{,}7\,\mathrm{m}$.

2. Si calcola $\vec{x}(5{,}5\,\mathrm{s})$ e si trova $(115{,}5\,\mathrm{m}; H)$.

3. Si ha

$$\vec{v}(5{,}5\,\mathrm{s}) = v_0 \cos\alpha \vec{e}_1 + [v_0 \sin\alpha - g(5{,}5\,\mathrm{s})]\vec{e}_2 = 21\,\mathrm{m/s}\ \vec{e}_1 - 17{,}6\,\mathrm{m/s}\ \vec{e}_2$$

la cui norma vale $\|\vec{v}(5{,}5\,\mathrm{s})\| = 27{,}4\,\mathrm{m/s}$.

4. $h = 65{,}8$.

5. $D = 155{,}7\,\mathrm{m}$.

Esercizio 5 *Moto uniformemente accelerato (MUA)*

In questi problemi è necessario scomporre sugli assi le equazioni del MUA scritte in forma vettoriale.

1. Abbiamo

$$\begin{cases} x_1: & x_1(t) = 2\,\mathrm{m/s^2}\,t^2 \\ x_2: & x_2(t) = 8\,\mathrm{m/s}\,t + 1\,\mathrm{m/s^2}\,t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1: & v_1(t) = 4\,\mathrm{m/s^2}\,t \\ x_2: & v_2(t) = 8\,\mathrm{m/s} + 2\,\mathrm{m/s^2}\,t \end{cases}$$

   (a) $x_2(3{,}81\,\mathrm{s}) = 44{,}96\,\mathrm{m}$.

   (b) $v(3{,}81\,\mathrm{s}) = 21{,}81\,\mathrm{m/s}$.

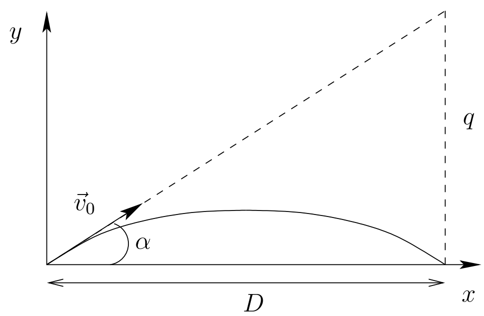
   (c)
$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 30{,}46\,\mathrm{kg\,m/s} \\ 31{,}24\,\mathrm{kg\,m/s} \end{pmatrix} = 30{,}42\,\mathrm{kg\,m/s}\;\vec{e}_1 + 31{,}24\,\mathrm{kg\,m/s}\;\vec{e}_2$$

2. (a) Abbiamo
$$\begin{cases} x_1: & x_1(t) = \frac{1}{2}\frac{\beta v_0}{m}t^2 \\ x_2: & x_2(t) = v_0 t \\ x_3: & x_3(t) = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{m}t^2 \end{cases}$$

   (b) Dalla seconda componente, ponendo come indicato $x_2 = D$, otteniamo $t = D/v_0$, da cui
$$x_1 = \frac{1}{2}\frac{\beta v_0}{m}\left(\frac{D}{v_0}\right)^2 \qquad x_3 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{m}\left(\frac{D}{v_0}\right)^2$$
   da cui eliminando v_0 si ottiene
$$x_3 = \frac{2\varepsilon m}{\beta^2 D^2}x_1^2$$
   che è l'equazione di una parabola.

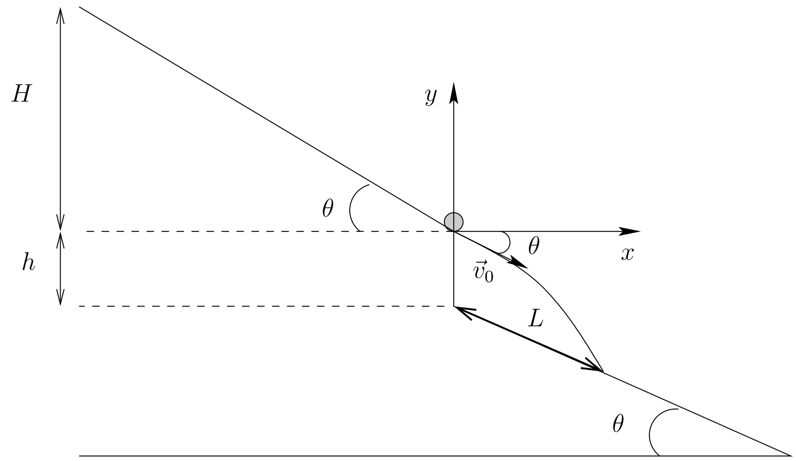
Esercizio 6 *Tiro con l'arco*

Abbiamo $q = D\tan\alpha$ e conoscendo D possiamo ricavare α dall'equazione per la gittata, abbiamo
$$\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\frac{Dg}{v_0^2} \Longrightarrow \alpha = 3{,}33^\circ$$
e quindi $q = 2{,}91\,\mathrm{m}$.



Esercizio 7 *Salto con gli sci*

Determiniamo la velocità v_0 al salto, per far ciò utilizziamo il teorema dell'energia meccanica, otteniamo $v_0 = \sqrt{2gH}$.



L'equazione cartesiana della traiettoria è data da (utilizziamo il risultato dell'esercizio 3. con $\alpha = -\theta$)

$$y(x) = -\tan\theta x - \frac{1}{2}\frac{g}{\cos^2\theta}\frac{x^2}{v_0^2}$$

e per determinare il punto d'impatto dobbiamo trovare l'intersezione di questa curva con la retta di equazione

$$y(x) = -\tan\theta x - h$$

che descrive la pista d'arrivo:

$$h = \frac{1}{2}\frac{g}{\cos^2\theta}\frac{x^2}{v_0^2} = \frac{1}{4H}\frac{x^2}{\cos^2\theta} = \frac{L^2}{4H}$$

da cui $L = 2\sqrt{hH} = 15{,}5\,\mathrm{m}$.