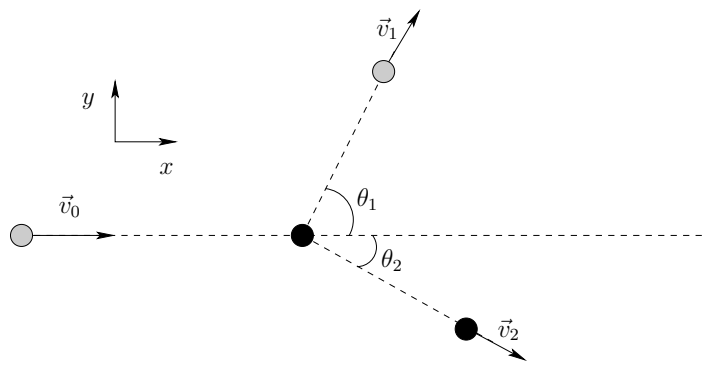
FISICA

Serie 14: Soluzioni

II liceo

Esercizio 1 *Collisione elastica in 2D*



Si utilizza la **conservazione della quantità di moto** (il sistema è isolato), e, poiché la collisione è elastica, anche l'energia cinetica è costante.

1. La conservazione della quantità di moto dà

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$$

e la costanza dell'energia cinetica dà

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \Longrightarrow v_1^2 + v_2^2 = v_0^2$$

ma

$$v_0^2 = \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0 = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = v_1^2 + v_2^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$$

da cui si deduce che $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ ossia $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ e si ha quindi la condizione sugli angoli $\theta_1 + \theta_2 = 90°$ da cui il vettore $\vec{v}_2$ è specificato dall'angolo $\theta_2 = 30°$.

2. Scomponendo la conservazione della quantità di moto sugli assi xy otteniamo

$$\begin{cases} x: & v_0 = v_1 \cos\theta_1 + v_2 \cos(90° - \theta_1) \\ y: & 0 = v_1 \sin\theta_1 - v_2 \sin(90° - \theta_1) \end{cases}$$

da cui $v_2 = v_1 \tan\theta_1$ e si ottiene

$$v_1 = v_0 \cos\theta_1 = 250\,\mathrm{m/s} \qquad \text{e} \qquad v_2 = v_0 \sin\theta_1 = 433\,\mathrm{m/s}\,.$$

Esercizio 2 *Collisione anelastica in 2D*

La **conservazione della quantità di moto** (il sistema è isolato) dà

$$m_1\vec{v}_1 = m_2\vec{v}_2 + (m + m_1 - m_2)\vec{v}_3$$

dove abbiamo utilizzato la conservazione della massa. Quindi

$$\begin{aligned}
\Delta E^{cin} &= E^{cin}_{fin} - E^{cin}_{in} \\
&= \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}(m + m_1 - m_2)\left(\frac{m_1\vec{v}_1 - m_2\vec{v}_2}{m + m_1 - m_2}\right)\cdot\left(\frac{m_1\vec{v}_1 - m_2\vec{v}_2}{m + m_1 - m_2}\right) - \frac{1}{2}m_1v_1^2 \\
&= \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1v_1^2 + m_2v_2^2}{m + m_1 - m_2} - \frac{1}{2}m_1v_1^2 \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{m_1(m_2 - m)v_1^2 + m_2(m_1 + m)v_2^2}{m + m_1 - m_2}\right\}
\end{aligned}$$

Esercizio 3 *Biliardo*

1. La **conservazione della quantità di moto** (il sistema è isolato) scomposta sugli assi xy (vedi figura esercizio 1.) si scrive (le masse sono uguali)

$$\begin{cases} x: & v_0 = v_1\cos\theta_1 + v_2\cos\theta_2 \\ y: & 0 = v_1\sin\theta_1 - v_2\sin\theta_2 \end{cases}$$

   da cui si deduce

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{v_1}{v_2}\sin\theta_1\right) = 41^\circ$$

2. $v_0 = 4{,}76\,\mathrm{m/s}$.

3. Abbiamo $\Delta E^{cin} = \frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2 - v_0^2) = -3{,}2m\,\mathrm{J/kg} < 0$: l'energia cinetica diminuisce e quindi l'urto non è elastico ma anelastico (una parte dell'energia cinetica si è trasformata in energia interna).

Esercizio 4 *Angoli*

Vedi esercizio 1. È importante notare che questo risultato non è valido in generale, per una collisione di particelle relativistiche non si ha $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$.

Esercizio 6 *Pendolo balistico*

1. Sia $\vec{v}_f$ la velocità del sistema *blocco* $\cup$ *proiettile* subito dopo l'urto, la conservazione della quantità di moto ci dà

$$mv = (m + m_0)v_f$$

Utilizziamo ora il teorema dell'energia meccanica per l'oscillazione del blocco, otteniamo

$$\frac{1}{2}(m + m_0)v_f^2 = (m + m_0)gh$$

da cui

$$v = \frac{m + m_0}{m}\sqrt{2gh} = 630\,\mathrm{m/s}\ .$$

2. Prima dell'urto l'energia meccanica del sistema *blocco* $\cup$ *proiettile*, che corrisponde all'energia cinetica, è unicamente l'energia cinetica del proiettile, quindi

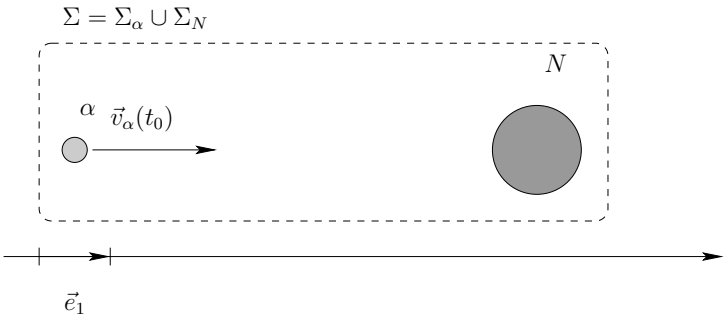
$$E_i^{mec} = \frac{1}{2}mv^2 = 1900\,\mathrm{J}$$

dopo l'impatto l'energia meccanica è

$$E_f^{mec} = \frac{1}{2}(m + m_0)v_f^2 = 3{,}3\,\mathrm{J}.$$

Solo lo 0,2% dell'energia cinetica iniziale si ritrova come energia meccanica del pendolo. Il resto si converte in energia interna del sistema *blocco* $\cup$ *proiettile*.

Esercizio 6 *Collisione elastica*



1. Abbiamo:

   - situazione iniziale ($t = t_0$):

$$\begin{aligned} \vec{p}_{tot}(t_0) &= \vec{p}_\alpha(t_0) + \vec{p}_N(t_0) = m_\alpha \vec{v}_\alpha(t_0) \\ E_{tot}^{cin}(t_0) &= E_\alpha^{cin}(t_0) + E_N^{cin}(t_0) = \tfrac{1}{2}m_\alpha v_\alpha(t_0)^2 \end{aligned}$$

   per estensività della quantità di moto e dell'energia cinetica e poiché il nucleo N è immobile.

- situazione finale ($t = t_1 > t_0$):

$$\begin{aligned} \vec{p}_{tot}(t_1) &= \vec{p}_\alpha(t_1) + \vec{p}_N(t_1) = m_\alpha \vec{v}_\alpha(t_1) + m_N \vec{v}_N(t_1) \\ E^{cin}_{tot}(t_1) &= E^{cin}_\alpha(t_1) + E^{cin}_N(t_1) = \tfrac{1}{2} m_\alpha v_\alpha(t_1)^2 + \tfrac{1}{2} m_N v_N(t_1)^2 \ . \end{aligned}$$

Il sistema $\Sigma = \Sigma_\alpha \cup \Sigma_N$ è isolato e quindi la quantità di moto è costante (poiché è una grandezza conservata). Inoltre la **collisione è elastica** e quindi, per definizione, $\Delta E^{cin} = 0$. Dunque abbiamo:

$$\begin{cases} m_\alpha v_\alpha^2(t_0) = m_\alpha v_\alpha^2(t_1) + m_N v_N^2(t_1) \\ m_\alpha v_\alpha(t_0) = -m_\alpha v_\alpha(t_1) + m_N v_N(t_1) \end{cases} \tag{1}$$

dove abbiamo scelto un sistema di coordinate tale che

$$v_{\alpha,1}(t_0) = v_\alpha(t_0) \qquad v_{\alpha,1}(t_1) = -v_\alpha(t_1) \qquad v_{N,1}(t_1) = v_N(t_1) \ .$$

Dobbiamo risolvere il sistema (1). Dalla prima equazione otteniamo

$$v_N(t_1)^2 = \frac{m_\alpha v_\alpha^2(t_0) - m_\alpha v_\alpha^2(t_1)}{m_N} = \frac{m_\alpha}{m_N} \left[v_\alpha(t_0) - v_\alpha(t_1)\right] \left[v_\alpha(t_0) + v_\alpha(t_1)\right] \tag{2}$$

e dalla seconda equazione otteniamo

$$v_N(t_1) = \frac{m_\alpha v_\alpha(t_0) + m_\alpha v_\alpha(t_1)}{m_N} = \frac{m_\alpha}{m_N} \left[v_\alpha(t_0) + v_\alpha(t_1)\right] \ . \tag{3}$$

Ponendo (2)=(3)^2 abbiamo

$$\begin{aligned} & \frac{m_\alpha}{m_N} \left[v_\alpha(t_0) - v_\alpha(t_1)\right] \left[v_\alpha(t_0) + v_\alpha(t_1)\right] = \left(\frac{m_\alpha}{m_N}\right)^2 \left[v_\alpha(t_0) + v_\alpha(t_1)\right]^2 \\ \Longrightarrow \quad & \left[v_\alpha(t_0) - v_\alpha(t_1)\right] = \frac{m_\alpha}{m_N} \left[v_\alpha(t_0) + v_\alpha(t_1)\right] \\ \Longrightarrow \quad & v_\alpha(t_1) = \frac{m_N - m_\alpha}{m_N + m_\alpha} v_\alpha(t_0). \end{aligned}$$

dove nella penultima riga abbiamo semplificato per $v_\alpha(t_0) + v_\alpha(t_1) > 0$.

2. Se la particella ha perso il 75% della sua energia (cinetica) abbiamo

$$E^{cin}_\alpha(t_1) = \tfrac{1}{4} E^{cin}_\alpha(t_1) \Longleftrightarrow v_\alpha(t_1) = \tfrac{1}{2} v_\alpha(t_0)$$

e con il valore della velocità finale calcolato nel punto 1 possiamo trovare la massa del nucleo N:

$$m_N = 3 m_\alpha \ .$$