FISICA

Serie 12: Verso la fisica statistica

II liceo

Esercizio 1 *Velocità quadratica media*

1. Dimostra che per un gas ideale in cui ogni particella ha ν gradi di libertà
$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\nu RT}{M}}$$
$\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ è chiamata **velocità quadratica media**.
2. Determina la velocità quadratica media, per un atomo di argon ($M = 40\,\mathrm{g/mol}$) quando la temperatura è di $300\,\mathrm{K}$.
3. Dopo aver stabilito i gradi di libertà di una molecola di ossigeno, determina la sua velocità quadratica media ($M = 32\,\mathrm{g/mol}$) quando la temperatura è di $300\,\mathrm{K}$.
4. Determina l'energia cinetica media di *traslazione* nei due casi precedenti.

Esercizio 2 *Teorema di equipartizione*

Un solido ad alta temperatura può essere rappresentato come un insieme di atomi posti su un reticolo cristallino, in cui ogni singolo atomo è a sua volta assimilato ad un oscillatore armonico.

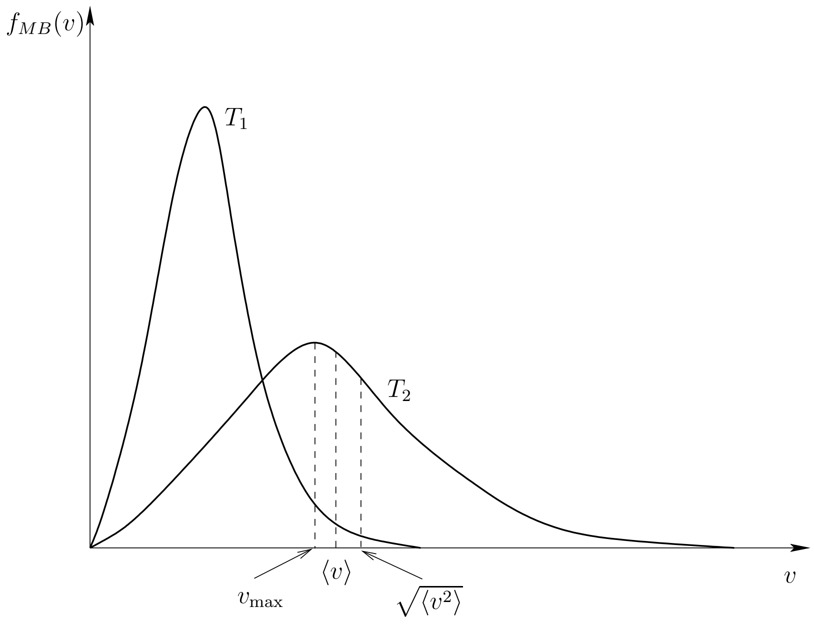
1. Utilizzando la teoria microscopica determina l'espressione dell'energia interna del solido, se esso è composto da N_A atomi.
2. Determina il calore specifico a volume costante.
3. Determina il calore specifico in $\mathrm{J/(K \cdot kg)}$ per il ferro, confronta con il valore sulle tavole.

Esercizio 3 *Distribuzione di Maxwell-Boltzmann*

Consideriamo un gas ideale monoatomico. Le particelle del gas non hanno tutte la stessa velocità, ma essa è distribuita secondo una certa legge probabilistica data dalla cosiddetta **distribuzione di Maxwell-Boltzmann** delle velocità

$$f_{MB}(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2$$

La funzione f_{MB} è illustrata nella figura alla pagina seguente ($T_1 < T_2$)



Dalla funzione $f_{MB}(v)$ è possibile ottenere le seguenti informazioni.

- La probabilità di ottenere una velocità nell'intervallo $[v_1, v_2]$ per una particella è data da
$$\text{Prob}\{v \in [v_1, v_2]\} = \int_{v_1}^{v_2} f_{MB}(v) \mathrm{d}v \ .$$
- Per sapere quante particelle hanno statisticamente una velocità nell'intervallo $[v_1, v_2]$ moltiplichiamo la probabilità per il numero di particelle:
$$\text{Prob}\{v \in [v_1, v_2]\} N \ .$$
- La velocità massima (o velocità più probabile) è data da
$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \ .$$
- Il valore medio di v è dato da
$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{m\pi}} \ .$$
- La velocità quadratica media è data da
$$\langle v^2 \rangle = \frac{3k_B T}{m} \ .$$

1. Cosa rappresenta graficamente $\text{Prob}\{v \in [v_1, v_2]\}$?
2. Un container è riempito con una mole di ossigeno alla temperatura di 300 K. Quale frazione di molecole ha velocità comprese tra 599 e 601 m/s? *Indicazione:* approssima l'integrale con l'area di un rettangolo. Perché è giustificato?

3. Quante molecole hanno una velocità compresa in questo intervallo?

4. Determina la velocità media, la velocità quadratica media e quella più probabile (o v_{max}).

Esercizio 4 *Libero cammino medio*

Consideriamo un gas ideale. Tra una collisione e l'altra le molecole del gas si muovono in linea retta a velocità costante. Un parametro utile per descrivere questro moto è il **libero cammino medio** λ. Esso descrive la distanza *media* attraversata da una particella tra due urti successivi. L'espressione del libero cammino medio è

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 N/V}$$

dove σ è il diametro delle particelle ed N il numero di particelle nel volume V.

Per l'ossigeno si ha $\sigma = 2{,}9 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$. Determina:

1. il libero cammino medio alla temperatura di 300 K e alla pressione atmosferica;

2. la frequenza media di collisione (ossia il numero di collisione per unità di tempo).

Esercizio 5 *Entropia di Boltzmann*

1. Spiega quali sono le idee di Boltzmann che permettono di esprimere l'entropia di uno stato macroscopico (U,V,N) (per esempio nel caso di un gas ideale) basandosi su un'analisi microscopica.

2. Illustra la relazione tra il principio di massima entropia del secondo principio della termodinamica e la probabilità degli stati macroscopici $\mathrm{Prob}(U,V,N)$.

3. È corretto affermare che l'evoluzione di un sistema isolato verso degli stati di equilibrio con entropia minore è *impossibile*? Discuti sulla base di un esempio.

Esercizio 6 *Quattro molecole in una scatola*

Consideriamo quattro molecole in una scatola rettangolare. Indichiamo con L e R la collocazione di una molecola nella metà sinistra, risp. destra, della scatola.

I macrostati sono dati da:

- I tutte le molecole a sinistra
- II una molecola a destra e tre a sinistra
- III due a destra e due a sinistra
- IV tre a destra e una a sinistra
- V tutte le molecole a destra.

Il microstato è stato dall'elenco delle possibili collocazioni (L) o (R) delle quattro molecole, ad esempio

I: LLLL

1. Con una tabella determina il numero di microstati associati ad un macrostato dato (ossia Ω).
2. Determina poi l'entropia di Boltzmann dei diversi stati macroscopici. Qual è quello di entropia massima?
3. Determina la probabilità di ogni macrostato. Cosa puoi concludere?

In generale il numero di microstati associati ad un macrostato (per il problema in questione) è dato da

$$\Omega = \frac{N!}{N_L! N_R!}$$

dove $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 2 \cdot 1$ (chiamato n fattoriale) e si pone $0! = 1$.

4. Verifica che con il crescere di N l'entropia di Boltzmann tende ad essere sempre più concentrata attorno al macrostato in cui la metà delle molecole sono a destra e l'altra metà a sinistra.
   Indicazioni: Per n grande vale $n! \simeq n \ln n - n$, scrivi $N_L = N - N_R$ e rappresenta graficamente la funzione S_B in funzione di N_R con diversi valori N fissati.