
FISICA

Serie 8: Soluzioni

II liceo

Esercizio 1 *Espansione isoterma reversibile/irreversibile*

1. Abbiamo $\Delta U = 0$ e quindi $Q = -W$. Ora, visto che il processo è isoterma possiamo scrivere

$$W = Nk_B T \ln \frac{V_i}{V_f} < 0 \implies Q = -Nk_B T \ln \frac{V_i}{V_f} > 0$$

il gas esercita un lavoro sull'esterno (la molla) poiché $W < 0$ e riceve energia dall'esterno nella modalità calore $Q > 0$.

2. • Gas:

$$\Delta S^{gas} = \frac{Q}{T} = Nk_B \ln \frac{V_f}{V_i} > 0$$

questo risultato lo si ottiene anche via la funzione $S(U, V, N)$ del gas ideale.

- Bagno termico: considerando il bagno termico come sistema il calore fornito dal quest'ultimo al gas corrisponde a $-Q$ ($\Delta U^{bagno} = -Q$), quindi, visto che anche per il bagno il processo è isoterma abbiamo

$$\Delta S^{bagno} = \frac{-Q}{T} = -Nk_B \ln \frac{V_f}{V_i} < 0$$

3. La variazione di entropia del sistema e del bagno termico vale

$$\Delta S^{tot} = \Delta S^{bagno} + \Delta S^{gas} = 0$$

il sistema bagno + gas + molla (si ammette che $\Delta S^{molla} = 0$) è *isolato* e quindi visto che $\Delta S^{tot} = 0$ se ne conclude che il processo è *reversibile*, non vi è produzione interna di entropia: $\delta_i S = 0$. L'energia immagazzinata nella molla può essere utilizzata per comprimere il gas, invertendo il processo.

4. Nel caso dell'espansione libera abbiamo $\Delta U = 0$ e non vi è lavoro ($W = 0$), quindi $Q = 0$ e se ne conclude che $\Delta S^{bagno} = 0$. Quindi $\Delta S^{tot} = \Delta S^{gas}$. Ora grazie alla funzione $S(U, V, N)$ possiamo calcolare ΔS^{gas} , otteniamo

$$\Delta S^{gas} = Nk_B \ln \frac{V_f}{V_i} > 0$$

da cui $\Delta S^{tot} > 0$, il processo è *irreversibile* (il sistema bagno + gas è *isolato*). La variazione di entropia del gas è la stessa di quella del caso reversibile, ciò è dovuto al fatto che S è una grandezza di stato e quindi ΔS dipende unicamente dagli stati iniziale e finale, che nel nostro caso sono identici per i due processi, da cui l'uguaglianza di ΔS^{gas} .

Esercizio 2 *Conduzione termica per solidi ad alta temperatura*

1. Il sistema Σ è *isolato* e quindi la conservazione dell'energia dà $U_i = U_f$, dove $U = U_s + U_1$ per estensività dell'energia. Quindi

$$\underbrace{3n_sRT_s + 3n_1RT_1}_{U_i} = \underbrace{3n_sRT_f + 3n_1RT_f}_{U_f}$$

da cui

$$T_f = \frac{n_sT_s + n_1T_1}{n_s + n_1}$$

2. Per trovare α scriviamo $T_f = T_s - \alpha(T_s - T_1)$ e rimpiazziamo T_f con $\frac{n_sT_s + n_1T_1}{n_s + n_1}$, e quindi abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{n_sT_s + n_1T_1}{n_s + n_1} &= T_s - \alpha(T_s - T_1) \\ \Rightarrow n_sT_s + n_1T_1 &= (n_s + n_1)[T_s - \alpha(T_s - T_1)] \\ \Rightarrow \alpha(T_s - T_1)(n_s + n_1) &= (n_s + n_1)T_s - (n_sT_s + n_1T_1) \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{n_1}{n_1 + n_s} \end{aligned}$$

Se la sorgente di calore è un “bagno termico”, allora $\alpha = 0$ e quindi $T_f = T_s$. Un bagno termico è quindi una sorgente di calore la cui temperatura resta costante.

3. La conduzione termica è un processo *irreversibile*, in fatti non si osserverà mai che (spontaneamente – sistema isolato) dalla situazione di equilibrio termico il solido Σ_s ritorna alla temperatura T_s e il solido Σ_1 ritorni alla temperatura T_1 .
4. I due sotto sistemi Σ_s e Σ_1 *non* sono adiabaticamente chiusi poiché vi è uno scambio di energia nella modalità calore. Quindi non possiamo asserire nulla sul segno di ΔS_s e ΔS_1 a partire dal secondo principio.
5. Abbiamo

$$S_s(U_s) = 3n_sR \ln \frac{U_s}{(U_s)_i} + S_s((U_s)_i) \quad \text{e} \quad S_1(U_1) = 3n_1R \ln \frac{U_1}{(U_1)_i} + S_1((U_1)_i)$$

da cui

$$S_s(T) = 3n_sR \ln \frac{T}{T_s} + S_s(T_s) \quad \text{e} \quad S_1(T) = 3n_1R \ln \frac{T}{T_1} + S_1(T_1)$$

e quindi, utilizzando l'estensività dell'entropia,

$$\Delta S^\Sigma = S_f^\Sigma - S_i^\Sigma = 3R \left(n_s \ln \frac{T_f}{T_s} + n_1 \ln \frac{T_f}{T_1} \right)$$

6. • Caso 1: $T_f = 332,95 \text{ K}$ e $\Delta S^\Sigma = 0,31 \text{ J/K} > 0$

- Caso 2: $T_f = 363,00 \text{ K}$ e $\Delta S^\Sigma = 0,17 \text{ J/K} > 0$

Abbiamo un sistema *isolato* ed un processo per il quale $\Delta S^\Sigma > 0$, il processo, come già osservato qualitativamente, è *irreversibile*.

7. Conoscendo la temperatura finale (=temperatura del nuovo stato di equilibrio) possiamo determinare l'energia di ogni sottosistema, infatti nello stato finale $U_s = 3n_sRT_f$ e $U_1 = 3n_1RT_f$, questo determina completamente lo stato di equilibrio finale poiché $U_f = 3RT_f(n_s + n_1)$ e $V_f = V_i$ (con V_i conosciuto essendo lo stato iniziale) e $n_f = (n_1 + n_s) = n_i \implies N_f = n_f N_A$.

Esercizio 3 *Processo a pressione costante e c_p*

1. L'ipotesi di bagno termico ci permette di affermare che la temperatura di quest'ultimo non cambia; inoltre nello stato di equilibrio finale (equilibrio termico) abbiamo $T_1 = T_2 = 100^\circ\text{C}$. Quindi $\Delta T = 73^\circ\text{C} = 73 \text{ K}$.

Da $Q_p = mc_p\Delta T$ abbiamo

$$Q_p = 1 \text{ kg} \cdot 880 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \cdot 73 \text{ K} = 6,42 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

2. Sappiamo che l'entropia è una funzione di stato e quindi ΔS dipende unicamente dagli stati iniziali e finali. Il metallo è caratterizzato dallo stato (U, V, N) ora N non cambia e per *ipotesi* neanche V (niente dilatazione termica). Inoltre abbiamo visto nelle serie precedenti che per i solidi ad alta temperatura $U = 3Nk_B T$ quindi gli stati iniziale e finale sono caratterizzati dall'energia interna via la temperatura.

Per **calcolare** ΔS consideriamo un cammino reversibile in tal caso $\delta_i S = 0$ e dal secondo principio possiamo scrivere $dS = \frac{\delta Q}{T}$, da cui (utilizzando l'indicazione)

$$\Delta S = mc_p \ln \frac{T_f}{T_i} \implies \Delta S = 1 \text{ kg} \cdot 880 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \ln \frac{373 \text{ K}}{300 \text{ K}} = 1,92 \cdot 10^2 \text{ J/K}$$

3. Anche per il bagno termico possiamo avvalerci dell'idea che è possibile calcolare ΔS^{bagno} su un cammino reversibile, per il bagno sappiamo pure che $T = T_2$ è costante e quindi

$$dS^{bagno} = \frac{\delta Q^{bagno}}{T} \implies \Delta S^{bagno} = \frac{Q^{bagno}}{T_2}$$

dove $Q^{bagno} = -Q_p$ corrisponde alla perdita di energia (nella modalità calore) del bagno termico. Abbiamo

$$\Delta S^{bagno} = -\frac{6,42 \cdot 10^4 \text{ J}}{100 \text{ K}} = -6,42 \cdot 10^2 \text{ J/K}$$

4. Abbiamo $\Delta S^{tot} = \Delta S + \Delta S^{bagno} = 508 \text{ J/K} > 0$. Ora il sistema totale è isolato e visto che $\Delta S^{tot} > 0$ possiamo concludere che il processo è irreversibile (come ci si poteva aspettare).

Esercizio 4 *Equilibrio termico ed entropia*

Per trovare la differenza di entropia dobbiamo prima identificare un processo reversibile che possa condurre il sistema dallo stato iniziale a quello finale di equilibrio termico. Calcoleremo poi la differenza di entropia di questa trasformazione reversibile utilizzando l'indicazione dell'esercizio precedente.

Per un tale procedimento abbiamo bisogno di un bagno termico a temperatura lentamente regolabile (ad esempio girando una manopola). Decidiamo dunque di sottoporre i due blocchi alle seguenti due trasformazioni separate:

- il blocco 1 cede energia nella modalità calore al bagno termico lentamente in modo reversibile,
- il blocco 2 riceve energia nella modalità calore dal bagno termico lentamente in modo reversibile.

Discutiamo queste due trasformazioni:

- *Trasformazione 1.* Fissando la temperatura della sorgente a 60°C , poniamo il blocco 1 sulla sorgente. (Blocco e sorgente sono alla stessa temperatura e perciò in equilibrio). Poi abbassiamo lentamente la temperatura della sorgente, e quindi anche del blocco, fino a 40°C . Man mano che la temperatura decresce di un incremento dT durante questo processo, una quantità di calore δQ viene trasferita dal blocco alla sorgente, possiamo scrivere questo trasferimento come $\delta Q = mc_p dT$. Secondo l'indicazione la variazione di entropia ΔS_1 del blocco 1 durante la variazione di temperatura è

$$\Delta S_1 = mc_p \ln \frac{T_f}{T_{1,i}} = -35,86 \text{ J/K} .$$

- *Trasformazione 2.* Fissando ora la temperatura della sorgente a 20°C , poniamo il blocco 2 sulla sorgente. Poi alziamo lentamente la temperatura della sorgente, e quindi anche del blocco, fino a 40°C . Con lo stesso ragionamento, possiamo scrivere secondo l'indicazione la variazione di entropia ΔS_2 del blocco 2 durante la variazione di temperatura:

$$\Delta S_2 = mc_p \ln \frac{T_f}{T_{2,i}} = 38,23 \text{ J/K} .$$

La variazione complessiva di entropia per il sistema di due blocchi che subiscono il processo con questa doppia trasformazione è data, per estensività dell'entropia, da:

$$\Delta S^{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 2,4 \text{ J/K} .$$

Considerato il fatto che l'entropia è una grandezza di stato, in ogni caso $\Delta S^{tot} = 2,4 \text{ J/K}$, anche per i processi irreversibili. Il raggiungimento dell'equilibrio termico descritto è un processo irreversibile poiché $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ è un sistema isolato.