Fisica quantistica

Introduzione alla polarizzazione e altri sistemi a due livelli

Christian Ferrari

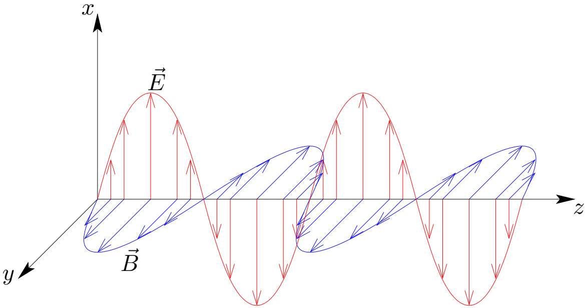
Liceo di Locarno

Sommario

Obiettivo: presentazione semplificata dei concetti fondamentali della fisica quantistica.

La polarizzazione della luce

- La luce consiste in un campo elettrico $\vec{E}$ ed un campo magnetico $\vec{B}$, tra loro ortogonali, che possono oscillare in ogni direzione perpendicolare alla direzione di propagazione.



- La **polarizzazione della luce** descrive la direzione di oscillazione del campo elettrico.

Notazione vettoriale della polarizzazione lineare

- Matematicamente corrispondenza 1-2: direzione $\leftrightarrow$ vettore.
- Quindi: possibilità di **descrivere la polarizzazione con un vettore** $\vec{e}$ di $\mathbb{R}^2$. Ma attenzione $\vec{e}$ e $-\vec{e}$ descrivono la stessa polarizzazione.
- Due polarizzazioni ortogonali: H e V, associate ai vettori ortogonali $\vec{e}_H$ ed $\vec{e}_V$. $\{\vec{e}_H, \vec{e}_V\}$ base di $\mathbb{R}^2$.
- La polarizzazione di angolo α risp. a $\vec{e}_H$ è descritta da

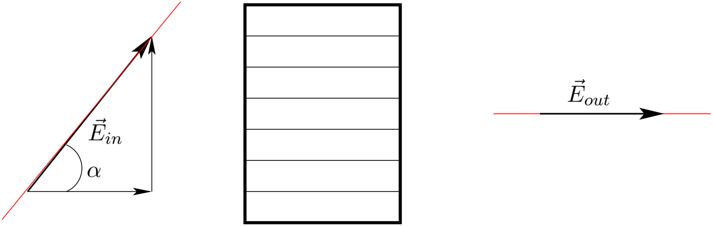
$$\vec{e}_\alpha = \cos(\alpha)\vec{e}_H + \sin(\alpha)\vec{e}_V \ ,$$

e la polarizzazione ortogonale è descritta da

$$\vec{e}_{\alpha^\perp} = -\sin(\alpha)\vec{e}_H + \cos(\alpha)\vec{e}_V \ .$$

Il polarizzatore

- Un **polarizzatore** è un materiale che, grazie alla sua struttura cristallina, possiede un asse preferenziale.
- Il polarizzatore agisce come filtro, poiché la polarizzazione è descritta da un vettore, trasmette la componente parallela al suo asse, e assorbe o riflette quella perpendicolare. Solo una parte della luce è trasmessa.



- Un polarizzatore permette di **misurare la polarizzazione** lungo una direzione (e la sua perpendicolare).

Intensità trasmessa e riflessa

Polarizzatore di asse orizzontale.

- Luce incidente di intensità I e polarizzazione ad un angolo α dall'orizzontale.
- Luce riflessa o assorbita di intensità I_R e polarizzazione verticale.
- Luce trasmessa di intensità I_T e polarizzazione orizzontale.
- Conservazione dell'energia

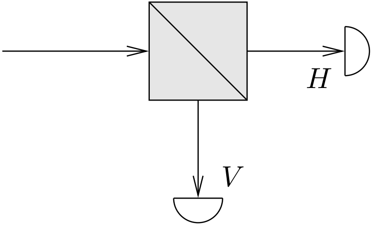
$$I = I_R + I_T$$

- $I_T \propto I$ e $I_R \propto I$ e

$$I_R = I\sin^2(\alpha) \qquad\qquad I_T = I\cos^2(\alpha)$$

Polarizing beam splitter

- Un **polarizing beam splitter** è un materiale che permette di separare un fascio di luce secondo la sua polarizzazione.
- La polarizzazione H è trasmessa e la polarizzazione V è riflessa.



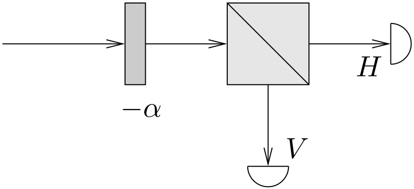
- Per **misurare la polarizzazione** della luce secondo le due direzioni H e V si può quindi usare un polarizing beam splitter.

Polarizing beam splitter e rotatori di polarizzazione

- Un **rotatore di polarizzazione** è un materiale che permette di ruotare la polarizzazione di un fascio di luce di un angolo $-\alpha$, in modo tale che

$$\vec{e}_\alpha \to \vec{e}_H \qquad\qquad \vec{e}_{\alpha^\perp} \to \vec{e}_V$$

- La separazione di un fascio con luce di polarizzazione α e $\alpha^\perp$ è ottenuta nel modo seguente



- Luce trasmessa: inizialmente di polarizzazione α;
  Luce riflessa: inizialmente di polarizzazione $\alpha^\perp$.

La polarizzazione del fotone

- Einstein 1905: la luce è composta di "particelle" chiamate fotoni.
- Una delle proprietà del fotone è la **polarizzazione del fotone**.
- In particolare: una fascio di luce polarizzato è costituito di fotoni *tutti* con la stessa polarizzazione.
- Fascio di luce di polarizzazione

$$\vec{e}_\alpha = \cos(\alpha)\vec{e}_H + \sin(\alpha)\vec{e}_V$$

stato di polarizzazione di un fotone del fascio

$$|\alpha\rangle = \cos(\alpha)|H\rangle + \sin(\alpha)|V\rangle \ .$$

Acuni dettagli sugli stati di polarizzazione

- $|H\rangle$ e $|V\rangle$, che descrivono gli stati di polarizzazione H e V del fotone, sono **vettori** dello **spazio vettoriale $\mathcal{H}$ degli stati di polarizzazione**.
- $|\alpha\rangle$ è una combinazione lineare (**stato di sovrapposizione**) degli stati (o vettori) $|H\rangle$ e $|V\rangle$.
- In particolare

$$|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |V\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

- Si osserva che valgono i seguenti **prodotti scalari**

$$\langle H|\alpha\rangle = \cos(\alpha) \quad \langle V|\alpha\rangle = \sin(\alpha)$$

  e $\langle H|H\rangle = \langle V|V\rangle = 1$, $\langle H|V\rangle = 0$.
- $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ è una **base** di $\mathcal{H}$ (nota come base H/V).

Le probabilità e la regola di Born

- Polarizzatore H: luce incidente di intensità I e luce trasmessa di intensità $I_T = I\cos^2(\alpha)$.
- Il fotone è indivisibile: o è trasmesso o è riflesso $\Rightarrow \cos^2(\alpha)$ è la *probabilità* di trasmissione.
- **Dopo la misura** con il polarizzatore o con il polarizing beam splitter: stato $|H\rangle$ se trasmesso, stato $|V\rangle$ se riflesso.
- **Regola di Born**: stato di polarizzazione del fotone (prima della misura)

$$|\alpha\rangle = \cos(\alpha)|H\rangle + \sin(\alpha)|V\rangle$$

$$\begin{aligned} P(\text{di trovare } |H\rangle \text{ dato } |\alpha\rangle) &= \cos^2(\alpha) = |\langle H|\alpha\rangle|^2 \\ P(\text{di trovare } |V\rangle \text{ dato } |\alpha\rangle) &= \sin^2(\alpha) = |\langle V|\alpha\rangle|^2 \end{aligned}$$

Un esempio

- Un'altra base utile (nota come base $+/-$) è definita da

$$
\begin{aligned}
|+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|H\rangle + |V\rangle\big)\\
|-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|H\rangle - |V\rangle\big)
\end{aligned}
$$

- La misura su un fotone nello stato $|\pm\rangle$ rispetto alla base H/V è

$$
\begin{aligned}
P(\text{di trovare } |H\rangle \text{ dato } |\pm\rangle) &= |\langle H|\pm\rangle|^2 = \frac{1}{2}\\
P(\text{di trovare } |V\rangle \text{ dato } |\pm\rangle) &= |\langle V|\pm\rangle|^2 = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Osservazioni importanti

- Lo stato di sovrapposizione $|\alpha\rangle = \cos(\alpha)|H\rangle + \sin(\alpha)|V\rangle$ descrive un singolo fotone, non vuol dire che alcuni fotoni sono polarizzati $|H\rangle$ e altri $|V\rangle$.
- $|\alpha\rangle$ descrive un fotone che, se misurato nella base H/V, ha una probabilità $\cos^2(\alpha)$ di essere trasmesso con polarizzazione H e una probabilità $\sin^2(\alpha)$ di essere trasmesso con polarizzazione V.
- Benché si conosca il comportamento statistico dell'insieme di fotoni, **non è possibile prevedere con certezza l'esito della misura di un singolo fotone**.
- Non esise nessun meccanismo nascosto: è il **carattere aleatorio della Natura microscopica**.

Altri sistemi a due livelli

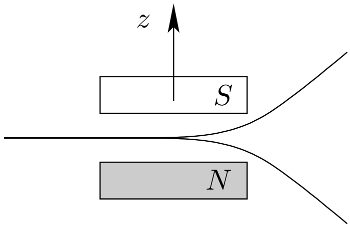
- La polarizzazione del fotone esibisce **due** stati ortogonali (cioè due stati per ogni base), ad esempio

$$|H\rangle \text{ e } |V\rangle \qquad \text{oppure} \qquad |+\rangle \text{ e } |-\rangle$$

- Esistono altri sistemi fisici che possono essere caratterizzati da **due** stati ortogonali:
  - lo **spin**, una proprietà intrinseca di ogni particella (scoperta nel 1927);
  - una **particella che si propaga in un interferometro** con solo due possibili direzioni;
  - un "**atomo a due livelli**";
  - . . . .
- Questi sistemi sono chiamati **sistemi a due livelli**.

Il magnete di Stern-Gerlach

- Un **magnete di Stern-Gerlach** è un magnete con un forte gradiente di campo magnetico in una direzione.
- Le particelle con uno spin sono deviate in sole due possibili direzioni.



- Per **misurare lo spin** secondo una direzione data si può quindi usare un magnete di Stern-Gerlach.

Lo spin

- Gradiente di campo nella direzione z: stati di spin $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$, se nella direzione x stati $|\leftarrow\rangle$ e $|\rightarrow\rangle$, dove vale

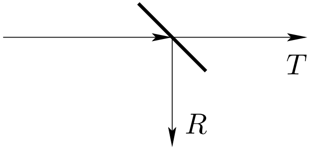
$$\begin{aligned} |\leftarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\big) \\ |\rightarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\big) \end{aligned}$$

- Vale la **regola di Born** per le probabilità, ad esempio

$$\begin{aligned} P(\text{di trovare } |\uparrow\rangle \text{ dato } |\rightarrow\rangle) &= |\langle\uparrow|\rightarrow\rangle|^2 = \frac{1}{2} \\ P(\text{di trovare } |\downarrow\rangle \text{ dato } |\rightarrow\rangle) &= |\langle\downarrow|\rightarrow\rangle|^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Beam splitter

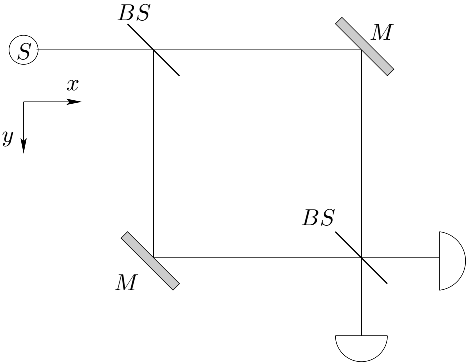
- Un **beam splitter** è un materiale che permette di separare un fascio di luce o di "particelle": una parte è trasmessa, una parte è riflessa in una direzione perpendicolare.



- Se il fascio è completamente riflesso si parla di specchio.

L'interferometro di Mach-Zehnder

- L'**interferometro di Mach-Zehnder** è costruito con specchi e beam splitters



- Notiamo $|x\rangle$ e $|y\rangle$ gli stati di propagazione nelle direzioni x e y.

In sintesi (1)

- Ogni sistema a due livelli è caratterizzato da **due stati ortogonali**, rappresentati da dei vettori

$$|\psi_1\rangle \text{ e } |\psi_2\rangle \qquad \text{oppure} \qquad |\varphi_1\rangle \text{ e } |\varphi_2\rangle \qquad \ldots$$

- Ogni coppia di stati ortogonali è una base dello **spazio vettoriale** $\mathcal{H}$ (di **dimensione 2**) degli stati del sistema.
- Un qualsiasi vettore $|\xi\rangle$ può scriversi come combinazione lineare dei vettori di base, è detto **stato di sovrapposizione**,

$$\begin{aligned} |\xi\rangle &= a_1|\psi_1\rangle + a_2|\psi_2\rangle \\ &= b_1|\varphi_1\rangle + b_2|\varphi_2\rangle \\ &= \ldots \end{aligned}$$

- **Ogni vettore rappresenta un possibile stato del sistema**.

In sintesi (2)

- Esistono dei setup che permettono di "separare" gli stati ortogonali di una base $\Rightarrow$ è possibile **misurare** le proprietà rappresentate da questi stati.
- **Dopo la misura** lo stato è descritto dal vettore associato al risultato della misura.
- La **probabilità** di ottenere un dato risultato è fornita dalla **regola di Born**:

$$\begin{aligned} P(\text{di trovare } |\psi_1\rangle \text{ dato } |\xi\rangle) &= |\langle\psi_1|\xi\rangle|^2 \\ P(\text{di trovare } |\psi_2\rangle \text{ dato } |\xi\rangle) &= |\langle\psi_2|\xi\rangle|^2 \end{aligned}$$

e analogamente per le altre basi.

L'evoluzione degli stati

- Ogni trasformazione U che rappresenta l'evoluzione di uno stato deve soddisfare alcune caratteristiche fondamentali (**teorema di Wigner**).
- U deve essere **lineare**:

$$U\big(|\xi_1\rangle + |\xi_2\rangle\big) = U(|\xi_1\rangle) + U(|\xi_2\rangle)$$

- U deve preservare il prodotto scalare (si dice essere **unitaria**):

$$\langle U\xi_1 | U\xi_2\rangle = \langle \xi_1 | \xi_2\rangle$$

- Ad esempio un beam splitter agisce come ($i = \sqrt{-1}$)

$$\begin{cases} |x\rangle & \to \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|x\rangle + i|y\rangle\big) \\ |y\rangle & \to \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|y\rangle + i|x\rangle\big) \end{cases}$$

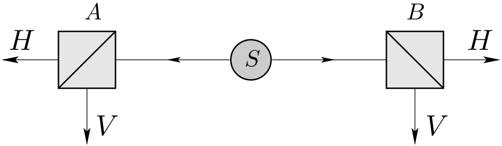
Sistemi composti classici

- Sistema A. Stato ρ_A.
- Sistema B. Stato ρ_B.
- Sistema $A \cup B$. Stato $\rho_{A \cup B} = (\rho_A, \rho_B)$.
- Se A e B interagiscono, l'evoluzione degli stati ρ_A e ρ_B dipende dai reciproci valori.
- **MA** ad ogni istante è ben definito lo stato $\rho_{A \cup B}$ come pure gli stati dei singoli sotto sistemi, ossia i valori di ρ_A, e ρ_B sono sempre ben definiti.
- Ad ogni istante è quindi possibile caratterizzare le proprietà dei sotto sistemi A e B, si dice che essi sono **separabili**.

Stati a due fotoni

Consideriamo un sistema composto da due fotoni.

- I quattro stati di polarizzazione HH, HV, VH, VV, possono verificarsi e sono **misurati** con due polarizing beam splitters.



- Questi stati sono associati ai **quattro vettori** notati

$$|H\rangle \otimes |H\rangle \qquad |H\rangle \otimes |V\rangle \qquad |V\rangle \otimes |H\rangle \qquad |V\rangle \otimes |V\rangle$$

- Chiaramente $|H\rangle \otimes |V\rangle \neq |V\rangle \otimes |H\rangle$.
- Il prodotto $\otimes$, chiamato prodotto tensoriale, gode delle usuali proprietà della moltiplicazione, ma non è commutativo.

Forma generale di uno stato a due fotoni

- I vettori

$$\Big\{|H\rangle \otimes |H\rangle, |H\rangle \otimes |V\rangle, |V\rangle \otimes |H\rangle, |V\rangle \otimes |V\rangle\Big\}$$

  formano una **base** dello spazio degli stati di polarizzazione a due fotoni $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, uno spazio vettoriale di dimensione 4 con prodotto scalare

$$\langle\psi_1 \otimes \psi_2|\varphi_1 \otimes \varphi_2\rangle = \langle\psi_1|\varphi_1\rangle\langle\psi_2|\varphi_2\rangle \ .$$

- La forma generale di uno stato di polarizzazione a due fotoni è una combinazione lineare (**stato di sovrapposizione**)

$$|\psi\rangle = a|H\rangle \otimes |H\rangle + b|H\rangle \otimes |V\rangle + c|V\rangle \otimes |H\rangle + d|V\rangle \otimes |V\rangle$$

  con $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$ (condizione di normalizzazione).

Forma generale di uno stato a due fotoni

- **Esempio 1**:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|H\rangle \otimes |H\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|H\rangle \otimes |V\rangle = |H\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$$

  Stato in cui il primo fotone ha polarizzazione $|H\rangle$ e il secondo $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$.
  $\Rightarrow$ **lo stato dei singoli fotoni è definito**.

- **Esempio 2**:

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle \otimes |H\rangle + |V\rangle \otimes |V\rangle)$$

  È impossibile fattorizzare $|\varphi\rangle$
  $\Rightarrow$ **lo stato dei singoli fotoni non è definito**.

- **Gli stati non fattorizzabili sono detti stati entangled**.

Misura su uno stato entangled

- Misura (con due polarizing beam splitters) della polarizzazione dello stato a due fotoni

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle \otimes |H\rangle + |V\rangle \otimes |V\rangle)$$

- Si osserva che i **risultati** dei due fotoni sono **correlati**: o per entrambi si ottiene $|H\rangle$ o per entrambi si ottiene $|V\rangle$.
- **MA** nello stato $|\varphi\rangle$ **ogni singolo fotone non ha uno stato di polarizzazione definito**, unicamente la proprietà della coppia di fotoni "stessa polarizzazione" è definita.

Osservazioni importanti

- Il concetto di stato entangled si estende a tutti i sistemi a due livelli: due spin, due interferometri di Mach-Zehnder (= interferometro di Franson), ...
- Se un sistema è in uno stato entangled è impossibile descrivere separatamente le due "particelle", esse **vanno considerate come un'unica entità** (**non separabilità**).
- Le correlazioni non possono essere spiegate classicamente, ma sono di pura origine quantistica.
- Gli **stati entangled** rappresentano il **cuore della fisica quantistica** e alla base di numerosi fenomeni interessanti:
  - Quantum key distribution;
  - Quantum computation;
  - Quantum teleportation;
  - ...

Referenze

- V. Scarani, L. Chua, S.Y. Liu, **Six Quantum Pieces**, World Scientific (2010)
- V. Scarani, **Initiation à la physique quantique**, Vuibert (2003, 3e ed. 2006)

Esercizio 1: polarizzazione del fotone

1. Verifica che $\{|\alpha\rangle, |\alpha^\perp\rangle\}$ è una base per ogni α, dove

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \cos(\alpha)|H\rangle + \sin(\alpha)|V\rangle \\ |\alpha^\perp\rangle &= \sin(\alpha)|H\rangle - \cos(\alpha)|V\rangle \end{aligned}$$

2. Come è possibile misurare i due stati di polarizzazione $|\alpha\rangle$ e $|\alpha^\perp\rangle$?
3. Sia $|\beta\rangle = \cos(\beta)|H\rangle + \sin(\beta)|V\rangle$. Determina le probabilità di osservare $|\alpha\rangle$ e $|\alpha^\perp\rangle$ se lo stato del sistema è $|\beta\rangle$.

Esercizio 2: spin

1. Sono dati gli stati di spin

$$\begin{aligned}|\nearrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle\big)\\ |\swarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle\big)\end{aligned}$$

   verifica che $\big\{|\nearrow\rangle, |\swarrow\rangle\big\}$ è una base.
2. La base trovata coincide con una misura dello spin con un magnete SG nella direzione y. Se lo stato iniziale è $|+\rangle$ quanto valgono le probabilità di trovare $|\nearrow\rangle$, risp. $|\swarrow\rangle$?

Esercizio 3: interferometro di Mach-Zehnder

1. Verifica che l'evoluzione definita da un beam splitter (slide 20) è unitaria.
2. Uno specchio è descritto da

$$\begin{cases} |x\rangle & \to i|y\rangle \\ |y\rangle & \to i|x\rangle \end{cases}$$

   Descrivi l'evoluzione dello stato iniziale $|x\rangle$ nell'interferometro

$$|x\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|x\rangle + i|y\rangle\big) \to \dots$$

3. Quanto valgono le probabilità di trovare $|x\rangle$, risp. $|y\rangle$ all'uscita dell'interferometro?

Esercizio 4: entanglement (1)

1. Considera i seguenti stati di polarizzazione a due fotoni

$$
\begin{aligned}
|\psi_1\rangle &= \frac{1}{2}\big(|H\rangle\otimes|H\rangle+|H\rangle\otimes|V\rangle+|V\rangle\otimes|H\rangle+|V\rangle\otimes|V\rangle\big)\\
|\psi_2\rangle &= \frac{1}{2}\big(|H\rangle\otimes|H\rangle+|H\rangle\otimes|V\rangle+|V\rangle\otimes|H\rangle-|V\rangle\otimes|V\rangle\big)\\
|\psi_1\rangle &= \frac{1}{2}|H\rangle\otimes|H\rangle+\frac{\sqrt{3}}{2}\big(|V\rangle\otimes|H\rangle+|V\rangle\otimes|V\rangle\big)\\
|\psi_2\rangle &= \cos(\theta)|H\rangle\otimes|H\rangle+\sin(\theta)|V\rangle\otimes|V\rangle
\end{aligned}
$$

   e verifica che sono correttamente normalizzati.
2. Quali sono stati entangled?
3. Scrivi gli stati non entangled come prodotto esplicito di stati di polarizzazione ad un fotone.

Esercizio 5: entanglement (2)

1. Considera gli stati $|\alpha\rangle$ e $|\alpha^{\perp}\rangle$ dell'esercizio 1. Verifica che

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha\rangle \otimes |\alpha\rangle + |\alpha^{\perp}\rangle \otimes |\alpha^{\perp}\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle \otimes |H\rangle + |V\rangle \otimes |V\rangle\right)$$

2. Cosa accade se entrambi i fotoni sono misurati nella stessa base?