

Sistemi di numerazione

Due esempi a confronto

Christian Ferrari

Liceo di Locarno

Laboratorio di matematica

Definizione di sistema numerico

Definizione

Si dice **sistema di numerazione** un insieme di **simboli** e di **regole** che permettono di rappresentare i numeri.

Per definire un sistema di numerazione è quindi necessario indicare:

- un insieme di simboli dette le **cifre**;
- una **sintassi**, cioè un insieme di regole che specificano come costruire i vari numeri.

Esempio

- Nella **numerazione romana** i simboli sono:

I V X L C D M

dove $I=1$, $V=5$, $X=10$, $L=50$, $C=100$, $D=500$, $M=1000$.

- Nella **numerazione decimale** i simboli sono 10:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

La sintassi

Oltre alla differenza dei simboli è però altrettanto importante la differenza delle regole secondo le quali si scrivono i numeri (sintassi).

Consideriamo i seguenti numeri romani

- **XVI** che equivale al nostro 16
- **III** che equivale al nostro 3

se noi però traduciamo semplicemente simbolo per simbolo in cifre arabe otterremmo:

- **X V I** \longrightarrow 10 5 1
- **I I I** \longrightarrow 1 1 1

ma come si determina il valore numerico?

\implies Entra in gioco la **sintassi**.

La sintassi del sistema romano

Utilizzando delle determinate regole con i numeri romani è possibile rappresentare qualunque numero, ecco le principali:

- **MM**: due simboli uguali l'uno accanto all'altro rappresentano la somma dei loro valori ($1000 + 1000 = 2000$);
- **VI**: se la cifra minore o uguale si trova a destra di quella maggiore le due cifre si sommano ($5 + 1 = 6$);
- **IV**: se la cifra minore si trova a sinistra di quella maggiore si fa una sottrazione ($5 - 1 = 4$);
- Un simbolo non può essere ripetuto più di tre volte.

Il sistema additivo

- Il **sistema di numerazione** romano è detto **additivo**, nell'indicare un numero, si sommano o si sottraggono i valori dei diversi simboli.
- Questo sistema di numerazione non si presta molto alla rappresentazione di grandi numeri:

888 \longrightarrow DCCCLXXXVIII

praticamente illeggibile.

- La difficoltà maggiore è nel calcolo

$$\begin{array}{r}
 155 \quad \text{CLV} \\
 12 \quad \text{XII} \\
 \hline
 167 \quad \text{CLXVII}
 \end{array}$$

Il sistema posizionale

Nel **sistema decimale**, il numero 4634 si può scrivere come

$$4634 = 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

- Le posizioni delle cifre, da destra a sinistra, corrispondono alle potenze di 10. La prima posizione è quella a potenza zero.
- Il valore numerico è la somma delle moltiplicazioni della cifra nella posizione i -esima per 10^i .

Questo sistema di scrivere i valori numerici è detto **notazione posizionale**: i simboli (cifre) usati per scrivere i numeri assumono valori diversi a seconda della *posizione* che occupano nella notazione.

Il sistema posizionale: diverse basi possibili

Ecco una definizione di sistema di numerazione posizionale:

- si sceglie un numero naturale $b \geq 2$, che chiameremo **base**;
- si scelgono n numeri $(\beta_{n-1}\beta_{n-2}\dots\beta_1\beta_0)_b$, che chiameremo **cifre** dove $\beta_i \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \beta_i \leq b - 1$;
- si compongono i numeri tenendo presente che il valore di ogni cifra va moltiplicato per:
 - b^0 cioè 1 (unità) se è l'ultima cifra alla destra del numero che stiamo considerando;
 - b^1 cioè b se è la seconda cifra da destra;
 - $b^{(i-1)}$ se è la i -esima cifra da destra;
- la somma tutti i valori così ottenuti è il numero decimale $(M)_{10}$ che stiamo considerando:

$$(M)_{10} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i b^i .$$