Un po' di calcolo combinatorio

Christian Ferrari

Laboratorio di Matematica

1 Principio fondamentale

Quesito 1. Il comitato studenti di una scuola è composto da 3 studenti di prima, 4 di seconda, 5 di terza e 2 di quarta. Un sottocomitato di 4 studenti in cui figura un rappresentante per anno deve essere scelto. Quanti sottocomitati è possibile formare?

Teorema 1. *Consideriamo r "esperienze". Se la prima da n_1 risultati possibili, e per ognuna di esse la seconda da n_2 risultati possibili, e se per ogni risultato delle prime due esperienze ve ne sono n_3 per la terza e così via, allora in totale ci saranno*

$$n_1 n_2 n_3 \dots n_r$$

risultati per le r "esperienze" considerate assieme.

Verifica 1. Verifica che il risultato ottenuto al quesito 1 è conforme al teorema 1.

Esercizio 1. Quante password composte da 4 lettere e 2 cifre è possibile ottenere? (Supponi un alfabeto di 26 lettere).

2 Permutazioni

Quesito 2. In un torneo sportivo si affrontano 3 squadre A, B, C. A giochi conclusi quante classifiche sono possibili?

Quesito 3. Se invece di 3 squadre ve ne sono 5 a quanto ammonta il numero delle classifiche?

Definizione 1. *Ogni sequenza ordinata di n oggetti distinti è chiamata **permutazione**.*

Definizione 2. *Sia $n \in \mathbb{N}^*$. L'espressione $n!$, chiamata n **fattoriale**, è definita dall'equazione*

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \,. \tag{1}$$

Per convenzione $0! = 1$.

Teorema 2. *Il numero di permutazioni di n oggetti è*

$$P_n = n!\,. \tag{2}$$

Verifica 2. Verifica che i risultati ottenuti ai quesiti 2 e 3 sono conformi al teorema 2.

Esercizio 2. Ad una gara di sci partecipano 6 ragazzi e 4 ragazze. I partecipanti sono classificati in base al loro tempo di discesa (si assume che non è possibile ottenere due volte lo stesso tempo). Quante classifiche sono possibili? Se i ragazzi sono classificati tra loro, come pure le ragazze, quante classifiche globali possiamo avere?

3 Disposizioni

Quesito 4. Quanti gruppi di 3 oggetti possiamo costruire scegliendoli tra i 5 oggetti distinti A, B, C, D, E? (L'ordine all'interno del gruppo è da prendere in considerazione).

Definizione 3. *Una **disposizione** di k oggetti scelti tra n oggetti distinti è un sottoinsieme di k oggetti scelti senza ripetizione, considerando l'ordine, da un'insieme che ne contiene n.*

Teorema 3. *Il numero di disposizioni di k oggetti scelti tra n è*

$$D_k^n = \frac{n!}{(n-r)!} \,. \tag{3}$$

Verifica 3. Verifica che il risultati ottenuto nel quesito 4 è conforme al teorema 3.

Esercizio 3. In quanti modi è possibile formare un comitato composto da un presidente, un vicepresidente ed un segretario da un insieme di 10 persone?

4 Combinazioni

Quesito 5. Quanti gruppi di 3 oggetti possiamo costruire scegliendoli tra i 5 oggetti distinti A, B, C, D, E? (L'ordine all'interno del gruppo non importa).

Quesito 6. Di un comitato di 5 persone 2 fanno parte dell'ufficio presidenziale. Quante possibilità vi sono per l'ufficio presidenziale?

Definizione 4. *Una **combinazione** di k oggetti scelti tra n oggetti distinti è un sottoinsieme di k oggetti scelti senza ripetizione, senza considerare l'ordine, da un'insieme che ne contiene n.*

Definizione 5. *Per $k \leq n$ l'espressione $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$ è definita dall'equazione*

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{(n-k)!k!} \,. \tag{4}$$

Teorema 4. *Il numero di combinazioni di k oggetti scelti tra n è*

$$C_k^n = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \,. \tag{5}$$

Verifica 4. Verifica che i risultati ottenuti nei quesiti 5 e 6 sono conformi al teorema 4.

Esercizio 4. Cinque premi devono essere attribuiti a degli studenti meritevoli in una classe di 25 persone. Quante possibilità vi sono? (Si suppone che il cumulo dei premi sia escluso).

Esercizio 5. Quanti possibili risultati vi sono ad una lotteria con 45 numeri in cui ne vengono estratti 6?

Osservazione. I numeri $\binom{n}{k}$ sono sovente chiamati ***coefficienti binomiali*** poiché intervengono nella formula del teorema del binomio citato qui sotto.

Teorema 5. *Sia $n \in \mathbb{N}^*$ e $x, y \in \mathbb{R}$ allora*

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + \binom{n}{n} y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \,. \quad (6)$$

Esercizio 6. Determina $(x+y)^3$, $(x+y)^4$ e $(x+y)^5$ con il teorema del binomio, confronta poi il risultato con il calcolo diretto.