# Un po' di logica

Christian Ferrari

Laboratorio di matematica

## 1 Introduzione

La ***logica*** è la disciplina che studia le condizioni di correttezza del ragionamento. Il suo scopo è quindi quello di elaborare criteri e metodi attraverso i quali si possano distinguere i ragionamenti corretti da quelli scorretti.
Un ragionamento è un gruppo strutturato di *enunciati*. Precisamente, un ragionamento è costituito da un insieme di enunciati, detti *premesse*, e da un enunciato, detto *conclusione*.

**Esempi**

- (P1) Se Dio può ingannare, allora Dio è malvagio;
  (P2) Dio non è malvagio;

  *dunque,*

  (C) Dio non può ingannare.

- (P1) Tutti gli uomini sono mortali;
  (P2) Socrate è un uomo;

  *quindi,*

  (C) Socrate è mortale.

Espressioni come "quindi", "dunque" vengono utilizzati per segnalare il passaggio dalle premesse alle conclusioni.

I ragionamenti non sono però composti da enunciati qualsiasi, bensì da enunciati dei quali è possibile dire senza ambiguità se sono veri o falsi (**principio del terzo escluso**) senza poter essere simultaneamente veri o falsi (**principio di non contraddizione**).
Un enunciato che soddisfa questa condizione è detto *proposizione*. Se una proposizione è vera, si dice che assume il *valore logico* $\mathcal{V}$, altrimenti si dice che assume il *valore logico* $\mathcal{F}$.

L'idea è di rintracciare una forma logica dei ragionamenti per controllarne la validità, ecco come vengono riformulati dal punto di vista logico gli esempi precedenti.

**Esempi**

- (P1) *Se* $P$, *allora* $Q$;

  (P2) *non* $Q$;

*dunque,*

  (C) *non* $P$.

- (P1) *Tutto* ciò che ha $F$, ha $G$;

  (P2) $x$ ha $F$;

*quindi,*

  (C) $x$ ha $G$.

Analizzando la formulazione dei ragionamenti qui sopra possiamo distinguere:

- le *proposizioni semplici*, ossia le proposizioni che non contengono altre proposizioni come loro componenti, esse sono indicati con delle lettere maiuscole ($P$, $Q$);
- le *proposizioni composte*, ossia quelle composte da più proposizioni semplici;
- dei *connettivi logici* (Se ..., allora ..., non ...) che permettono di combinare tra loro le proposizioni semplici;
- delle *proprietà* ($F$, $G$);
- degli *elementi* ($x$);
- dei *quantificatori* (Tutto ...) riferiti ad una proprietà in relazione ad un referente.

# 2 Connettivi logici

Le proposizioni possono essere combinate tra loro grazie a dei *connettivi logici.* I valori logici delle proposizioni così ottenute possono essere riassunte in tabelle, dette *tavole di verità.* Ecco i principali connettivi logici.

## 2.1 Negazione

Negando una proposizione $P$, si ottiene una nuova proposizione chiamata la *negazione* di $P$ e notata $\overline{P}$ oppure $\neg P$ (si legge non $P$). La proposizione $\overline{P}$ è vera quando $P$ è falsa, e falsa quando $P$ è vera.

Tavola di verità della negazione:

| $P$ | $\overline{P}$ |
|---|---|
| $\mathcal{V}$ | $\mathcal{F}$ |
| $\mathcal{F}$ | $\mathcal{V}$ |

## 2.2 Congiunzione ("e")

Componendo due proposizioni $P$ e $Q$ con il connettivo "e", si ottiene una nuova proposizione chiamata *congiunzione* di $P$ e $Q$ e notata $P \wedge Q$ (si legge $P$ e $Q$.) La proposizione $P \wedge Q$ è vera quando $P$ e $Q$ sono entrambe vere, e solo in questo caso.

Tavola di verità della congiunzione:

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|
| $\mathcal{V}$ | $\mathcal{V}$ | $\mathcal{V}$ |
| $\mathcal{V}$ | $\mathcal{F}$ | $\mathcal{F}$ |
| $\mathcal{F}$ | $\mathcal{V}$ | $\mathcal{F}$ |
| $\mathcal{F}$ | $\mathcal{F}$ | $\mathcal{F}$ |

**Esempio** Se per un viaggio, è necessario un biglietto del treno **e** un biglietto del battello, il viaggio può essere effettuato solo se si hanno entrambi i biglietti; se ne dovesse mancare anche uno solo il viaggio è impossibile.

## 2.3 Disgiunzione ("o")

Componendo due proposizioni $P$ e $Q$ con il connettivo "o", si ottiene una nuova proposizione chiamata *disgiunzione* di $P$ e $Q$ e notata $P \vee Q$ (si legge $P$ o $Q$). La proposizione $P \vee Q$ è falsa quando $P$ e $Q$ sono entrambe false, e solo in questo caso.

Tavola di verità della disgiunzione:

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| $\mathcal{V}$ | $\mathcal{V}$ | $\mathcal{V}$ |
| $\mathcal{V}$ | $\mathcal{F}$ | $\mathcal{V}$ |
| $\mathcal{F}$ | $\mathcal{V}$ | $\mathcal{V}$ |
| $\mathcal{F}$ | $\mathcal{F}$ | $\mathcal{F}$ |

**Esempio** Se per un viaggio, è necessario un biglietto del treno **o** un biglietto del battello, il solo caso per il quale il viaggio è impossibile è quello in cui non si possiede nessun biglietto; se si possiede almeno un biglietto il viaggio è possibile.

## 2.4 Inferenza ("se . . . , allora . . . ")

Componendo due proposizioni $P$ e $Q$ con il connettivo "se . . . , allora . . . ", si ottiene una nuova proposizione chiamata *inferenza* di $P$ e $Q$ e notata $P \to Q$ (si legge "se $P$, allora $Q$"). La proposizione $P \to Q$ è falsa quando $P$ è vera e $Q$ è falsa, e solo in questo caso.

Tavola di verità dell'inferenza:

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ |
|---|---|---|
| $\mathcal{V}$ | $\mathcal{V}$ | $\mathcal{V}$ |
| $\mathcal{V}$ | $\mathcal{F}$ | $\mathcal{F}$ |
| $\mathcal{F}$ | $\mathcal{V}$ | $\mathcal{V}$ |
| $\mathcal{F}$ | $\mathcal{F}$ | $\mathcal{V}$ |

In altre parole, l'inferenza è falsa unicamente se partendo da una proposizione vera se ne ottiene una falsa, in particolare da una proposizione falsa può seguire qualsiasi proposizione (vera o falsa).

## 2.5 Bicondizionale ("se e solo se")

Componendo due proposizioni $P$ e $Q$ con il connettivo "se e solo se", si ottiene una nuova proposizione chiamata *bicondizionale* di $P$ e $Q$ e notata $P \leftrightarrow Q$ (si legge "$P$ se e solo se $Q$" oppure "(se $P$, allora $Q$) e (se $Q$, allora $P$)"). La proposizione $P \leftrightarrow Q$ è vera quando $P$ e $Q$ hanno lo stesso valore logico, e solo in questo caso.

Tavola di verità del bicondizionale:

| $P$ | $Q$ | $P \leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| $\mathcal{V}$ | $\mathcal{V}$ | $\mathcal{V}$ |
| $\mathcal{V}$ | $\mathcal{F}$ | $\mathcal{F}$ |
| $\mathcal{F}$ | $\mathcal{V}$ | $\mathcal{F}$ |
| $\mathcal{F}$ | $\mathcal{F}$ | $\mathcal{V}$ |

## 2.6 Implicazione e equivalenza

Un'inferenza vera è chiamata *implicazione*, notata $P \Rightarrow Q$ (si legge "$P$ implica $Q$"). Un bicondizionale vero è chiamato *equivalenza*, notata $P \Leftrightarrow Q$ (si legge "$P$ equivalente a $Q$").

## 2.7 Proprietà dei connettivi

Le proposizioni composte seguenti sono vere, indipendentemente dai valori logici di $P$,$Q$ e $R$, e possono essere dimostrate con le tavole di verità.

| | |
|---|---|
| $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$ | Commutatività del "o" |
| $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$ | Commutatività del "e" |
| $((P \vee Q) \vee R) \Leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$ | Associatività del "o" |
| $((P \wedge Q) \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$ | Associatività del "e" |
| $(P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$ | Distributività del "e" rispetto a "o" |
| $(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ | Distributività del "o" rispetto a "e" |
| $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$ | Doppia negazione |
| $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \left(\overline{P} \vee \overline{Q}\right)$ | Prima legge di Morgan |
| $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \left(\overline{P} \wedge \overline{Q}\right)$ | Seconda legge di Morgan |

| | |
|---|---|
| $(P \to Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$ | Riduzione dell'inferenza |
| $\overline{P \to Q} \Leftrightarrow \left(P \wedge \overline{Q}\right)$ | Negazione dell'inferenza |
| $(P \to Q) \Leftrightarrow \left(\overline{Q} \to \overline{P}\right)$ | Contrapposizione |
| $((P \to Q) \wedge (Q \to P)) \Leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$ | Riduzione del bicondizionale |
| $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \Rightarrow (P \to R)$ | Sillogismo |
| $\left((P \to Q) \wedge \left(P \to \overline{Q}\right)\right) \Rightarrow \overline{P}$ | Ragionamento per l'assurdo |

# 3 Quantificatori

Sia $\mathcal{A}$ un insieme non vuoto che contiene gli elementi notati $x$, e sia $F$ una proprietà. Quattro casi sono possibili.

## 3.1 Quantificatore universale

1. Tutti gli elementi di $\mathcal{A}$ possiedono la proprietà $F$.

   Si scrive: $\forall\ x \in \mathcal{A}$, $x$ possiede $F$

   e si legge: Per ogni $x$ appartenente a $\mathcal{A}$, $x$ possiede $F$.

Il simbolo $\forall$ si chiama *quantificatore universale*.

## 3.2 Quantificatore esistenziale

2. Uno o più elementi di $\mathcal{A}$ possiede/possiedono la proprietà $F$.

   Si scrive: $\exists\ x \in E$ tale che $x$ possiede $F$

   e si legge: Esiste (almeno un) $x$ appartenente a $\mathcal{A}$ tale che $x$ possiede $F$.

3. Un solo elemento di $\mathcal{A}$ possiede la proprietà $F$.

   Si scrive: $\exists!\ x \in E$ tale che $x$ possiede $F$

   e si legge: Esiste un unico $x$ appartenente a $\mathcal{A}$ tale che $x$ possiede $F$.

4. Nessun elemento di $\mathcal{A}$ possiede la proprietà $F$.

   Si scrive: $\nexists\ x \in E$ tale che $x$ possiede $F$

   e si legge: Non esiste $x$ appartenente a $\mathcal{A}$ tale che $x$ possiede $F$.

Il simbolo $\exists$ si chiama *quantificatore esistenziale*.

## 3.3 Proprietà: negazione di una proposizione quantificata

| |
|---|
| $\neg\,(\forall\ x \in \mathcal{A}, x$ possiede $F) \Leftrightarrow \exists\ x \in \mathcal{A}$ tale che $x$ non possiede $F$ |
| $\neg\,(\exists\ x \in \mathcal{A}$ tale che $x$ possiede $F) \Leftrightarrow \forall\ x \in \mathcal{A}$, $x$ non possiede $F$ |

Quindi, la negazione di una proposizione che contiene un quantificatore si ottiene cambiando il quantificatore e negando la proprietà che segue.

# 4 Assiomi e teoremi

## 4.1 Definizioni

1. Un *assioma* è una proposizione che si considera vera e che serve da base ad una teoria matematica.

2. Un *teorema* è una proposizione vera, e il ragionamento che permette di stabilire la sua verità si chiama *dimostrazione* del teorema.

3. Si chiama *corollario* di un teorema una proposizione che ne è una conseguenza immediata.

4. Quando un teorema è scritto nella forma di un'implicazione $P \Rightarrow Q$, la proposizione $P$ è l'*ipotesi* e la proposizione $Q$ è la *conclusione* del teorema.

## 4.2 Metodi di dimostrazione

Un teorema si enuncia generalmente nella forma $P \Rightarrow Q$. Le proprietà dei connettivi che abbiamo visto ci offrono delle piste di riflessione per stabilire dei metodi di dimostrazione.

### Il metodo diretto

Dobbiamo dimostrare $P \Rightarrow Q$. Si parte dall'ipotesi che $P$ è vero, e si utilizzano gli assiomi, le definizioni e i teoremi precedentemente dimostrati per stabilire che $Q$ è pure vero. È il ragionamento diretto.

### La contrapposizione

Poiché $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ è possibile ridurre la dimostrazione del teorema $P \Rightarrow Q$ alla dimostrazione di $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

### La legge del sillogismo

La legge del sillogismo permette di ridurre la dimostrazione di un teorema $P \Rightarrow R$ alla dimostrazione di due teoremi $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow R$.

### La riduzione

Per dimostrare un'equivalenza $P \Leftrightarrow Q$, si dimostrano i due teoremi $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$.

### La dimostrazione per assurdo

Per dimostrare il teorema $P \Rightarrow Q$, si dimostra che la sua negazione $P \wedge \overline{Q}$ è una proposizione falsa. Per far ciò, si comincia a supporre che $P$ è vera e che $Q$ è falsa. Se, da un ragionamento, si giuge ad una contraddizione, il teorema $P \Rightarrow Q$ è dimostrato. Si utilizza il ragionamento per assurdo per dimostrare che una proposizione $P$ è vera dimostrando che $\overline{P}$ è falsa (o inversamente).

### Il metodo del contro-esempio

Per dimostrare che una proposizione del tipo "$\forall\ x \in \mathcal{A}$, $x$ possiede $F$" è falsa, è sufficiente trovare un $x_0$ di $\mathcal{A}$ che non possiede $F$, in altre parole è sufficiente trovare un esempio che non verifica l'enunciato: si parla di un *contro-esempio*.