Equazioni, funzioni e algoritmi: il metodo delle secanti

Christian Ferrari

1 Introduzione

La risoluzione di equazioni in $\mathbb{R}$ ci ha mostrato che solo per le equazioni polinomiali di primo e secondo grado, ed alcuni altri casi molto particolari (equazioni biquadratiche ad esempio), è possibile esprimere la soluzione per mezzo di una formula algebrica dei coefficienti. Ad esempio per l'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{dove} \qquad a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R} \ ,$$

assunto che $b^2 - 4ac \geq 0$ (affinché vi siano delle soluzioni in $\mathbb{R}$), le soluzioni espresse in funzione di a, b, c sono

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ .$$

Formule analoghe, ma più complesse, esistono per le equazioni polinomiali di terzo e quarto grado. Oltre il quarto grado non esistono formule algebriche generali.

Teorema di Ruffini-Abel (1799)
È impossibile esprimere le soluzioni di un'equazione polinomiale generica di grado superiore al quarto mediante una funzione algebrica dei coefficienti (cioè mediante somme, prodotti, potenze e radici dei coefficienti).

Nasce quindi la necessità di fornire degli strumenti in grado di determinare almeno delle approssimazioni delle soluzioni delle equazioni che non possono essere risolte con delle formule algebriche generali. Questo sia per le equazioni polinomiali di grado superiore al quarto, sia per altri tipi di equazioni ad esempio

$$2^x + 1 = x + 5$$

oppure

$$\log_{10}(x) = x^2 - 4 \ .$$

La capacità di affrontare questo tipo di equazioni non è utile solo per quello che riguarda la matematica ma è di particolare utilità ad esempio in determinati problemi derivanti dalla fisica.

2 Funzioni ed equazioni

Per determinare se vi sono soluzioni in $\mathbb{R}$ di una data equazione definita da

$$g(x) = h(x) \qquad x \in D_g \cap D_h \tag{1}$$

dove g, h sono due funzioni reali, è sufficiente rappresentare graficamente f e g sullo stesso grafico. Le ascisse dei punti di intersezione coincidono con le soluzioni cercate.

Esempio Siano $g(x) = 2^x + 1$ e $h(x) = x + 5$, con MAPLE si ottiene il grafico seguente

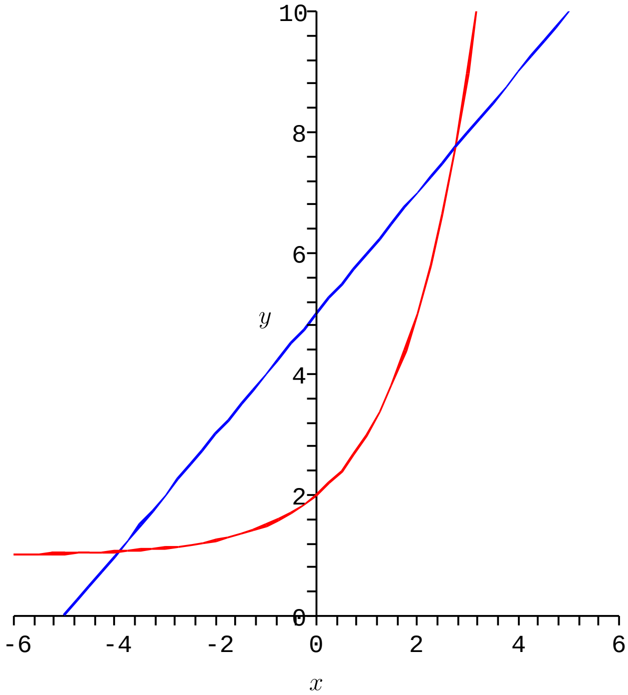

Figura 1: Grafico delle funzioni $g(x) = 2^x + 1$ (linea rossa) e $h(x) = x + 5$ (linea blu).

e gli zeri *stimati* sono $x_1 \cong -3.9$ e $x_2 \cong 2.8$.

L'equazione (1) è equivalente a

$$g(x) - h(x) = 0 \qquad x \in D_g \cap D_h \tag{2}$$

e definendo $f(x) = g(x) - h(x)$ con $D_f = D_g \cap D_h$ l'equazione (2) diventa

$$f(x) = 0 \qquad x \in D_f \ . \tag{3}$$

Consideriamo d'ora in avanti un'equazione definita da

$$\boxed{f(x) = 0 \qquad x \in D_f} \tag{4}$$

***La ricerca delle soluzioni di* (4) *è equivalente alla ricerca degli zeri della funzione* f.**

Esempio Con $g(x) = 2^x + 1$ e $h(x) = x + 5$ si ottiene $f(x) = 2^x - x - 4$. Il grafico ottenuto con MAPLE è il seguente

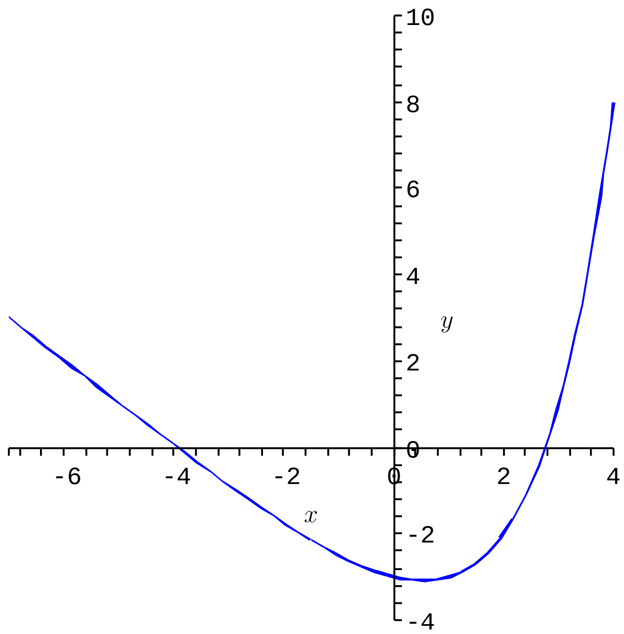

Figura 2: Grafico della funzione $f(x) = 2^x - x - 4$.

e come si può notare gli zeri *stimati* della funzione f coincidono con quanto trovato sopra, ossia $x_1 \cong -3.9$ e $x_2 \cong 2.8$.

Come si può notare, i valori x_1 e x_2 ottenuti graficamente sono delle approssimazioni delle soluzioni e limitate (in questo caso) ad una sola cifra decimale.

3 Il metodo delle secanti

Vogliamo ora presentare un ***algoritmo*** per determinare un'approssimazione delle soluzione. A differenza della soluzione grafica che necessita di un programma di matematica (nel nostro caso MAPLE) l'algoritmo lo si può implementare facilmente con EXCEL. Inoltre con l'ausilio di un algoritmo è possibile raggiungere velocemente una precisione maggiore rispetto alla lettura della soluzione dal grafico.

L'algoritmo presentato qui è detto ***metodo delle secanti***, poiché si basa sulla costruzione di secanti alla funzione data.

L'idea è la seguente:

> *Se non è possibile risolvere direttamente un problema assegnato . . .*
> *allora si prova a risolvere un problema simile e più semplice.*

Domanda: Quale può essere un problema molto semplice relativo allo zero di una funzione?
Risposta: La determinazione dello zero di una funzione affine!

Sia f una funzione reale. Dati due punti di ascissa x_0 e x_1 vicini alla soluzione α di $f(x) = 0$ è possibile determinare l'equazione della retta passante per i due punti.

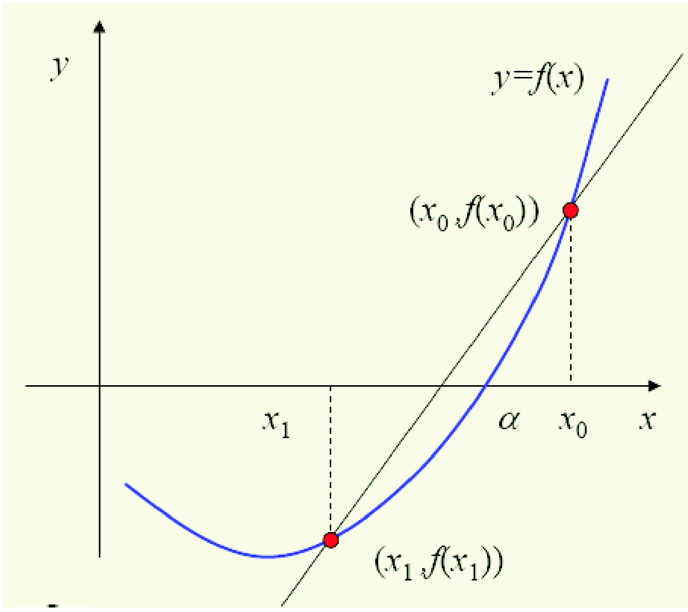

Figura 3: Grafico della funzione f, punti iniziali x_0 e x_1 e secante passante per essi.

Essa è data da

$$r(x) = ax + b$$

dove

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad e \qquad b = f(x_1) - ax_1$$

da cui $r(x) = ax + f(x_1) - ax_1$ ossia

$$r(x) = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1) \tag{5}$$

Sfruttando l'idea esposta sopra, troviamo lo zero di $r(x)$. Abbiamo $r(x) = 0$ se e solo se

$$x = -\frac{b}{a} = x_1 - \frac{f(x_1)}{a} = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) \; .$$

Definiamo quindi

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) \; .$$

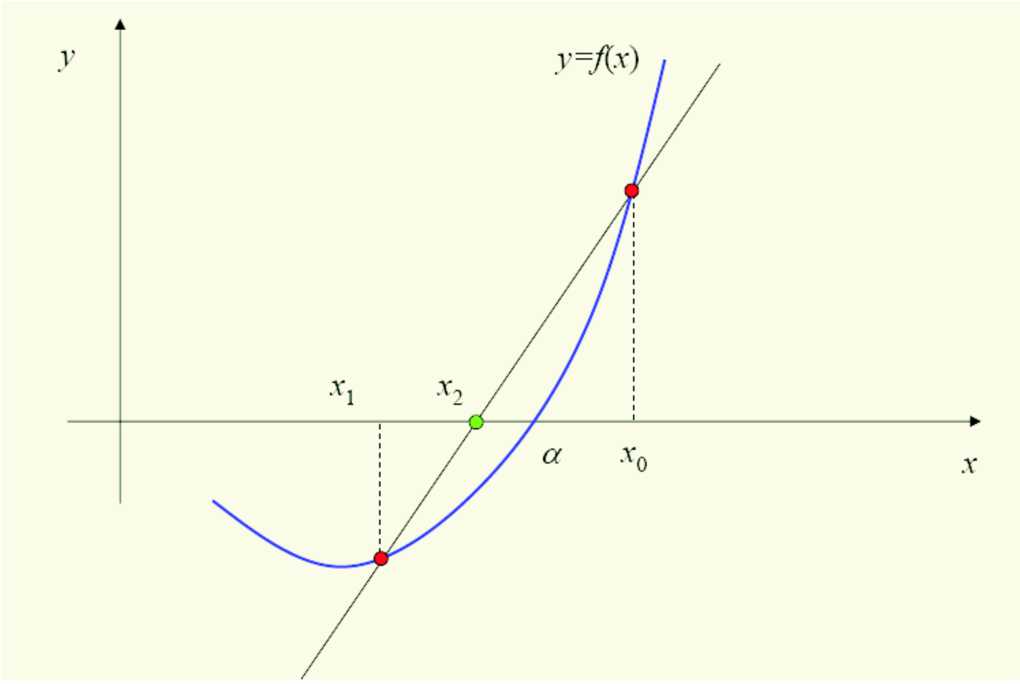

Figura 4: Grafico della funzione f, punti iniziali x_0 e x_1 e lo zero di $r(x)$ notato x_2.

Ripetiamo il procedimento considerando x_1 e x_2 per ottenere

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} f(x_2) \; .$$

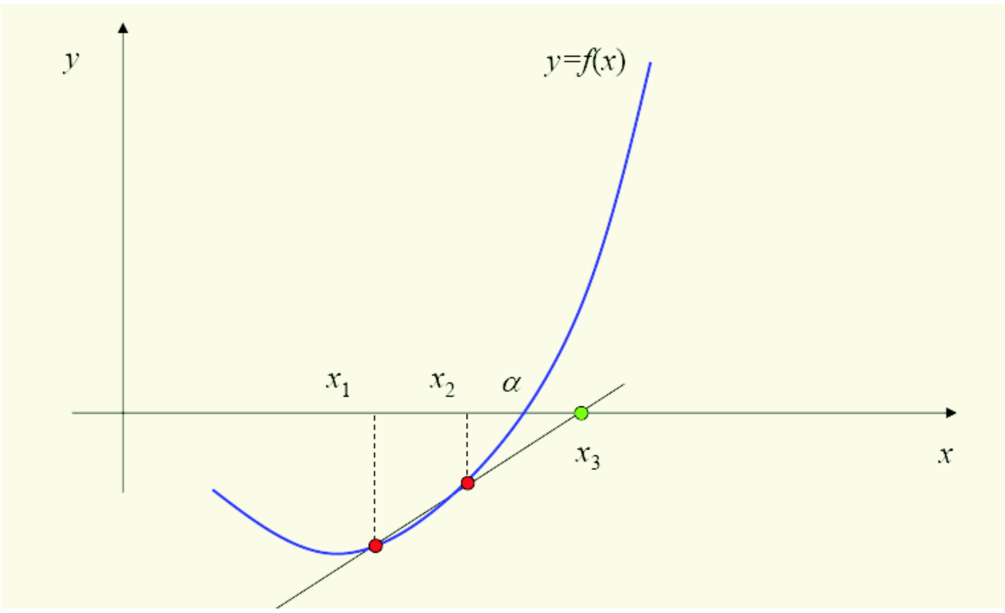

Figura 5: Grafico della funzione f, punti x_1 e x_2, secante passante per essi e relativo zero notato x_3.

In generale si ha quindi una successione di ascisse x_k, $(k = 0, 1, \ldots)$ definta da

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k) \tag{6}$$

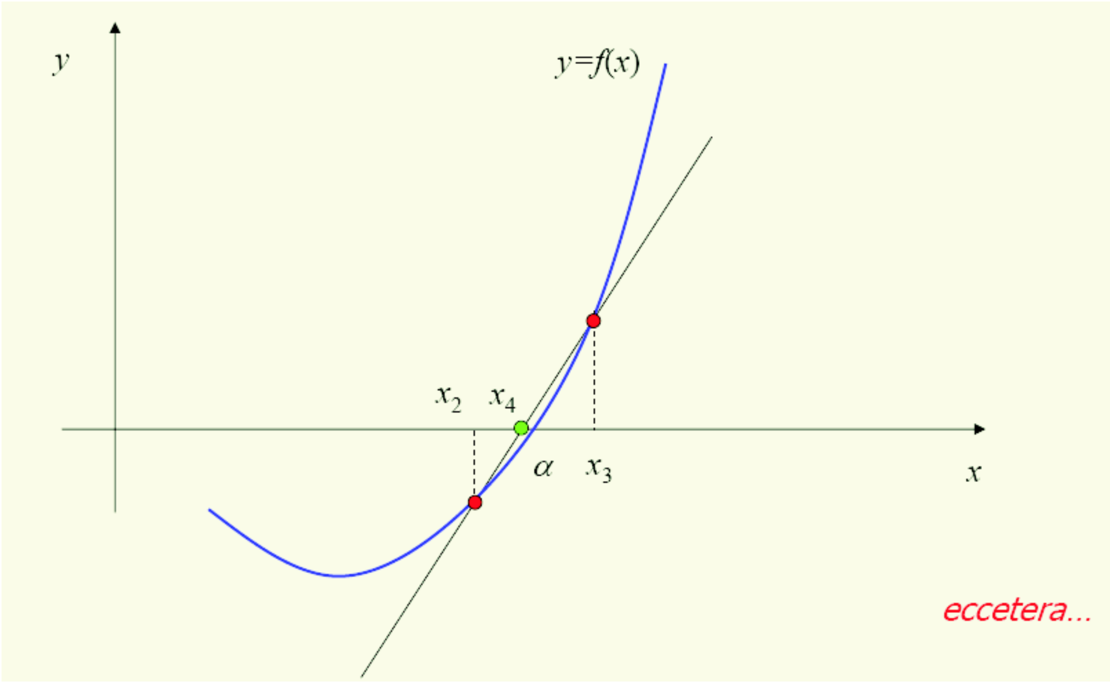

Figura 6: Grafico della funzione f, punti x_2 e x_3, secante passante per essi e relativo zero notato x_4.

Algoritmo

① Scegliere due ascisse x_0 e x_1 vicine allo zero cercato

② Iterare

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)}$$

calcolando poi $f(x_{k+1})$.

Si interrompe l'iterazione quando, per un dato n, $|f(x_{n+1})|$ è zero (entro la precisione voluta).

Esercizi

Utilizza il metodo delle secanti per ottenere le soluzioni reali delle equazioni $f(x) = 0$ quando:

- $f(x) = x^2 - 4$;
- $f(x) = 2^x - x - 4$;
- $f(x) = \log_{10}(x) - x^2 + 4$;
- $f(x) = x^5 + x + 1$.