

Fisica quantistica: fondamenti

Il teorema di Bell e l'origine delle correlazioni quantistiche

Christian Ferrari e Matteo Nota

Corso di aggiornamento

Lugano, 14 maggio 2008

Svolgimento del pomeriggio: sommario

- Origini classiche delle correlazioni?
- Il teorema di Bell (versione CHSH)
- Le esperienze di Aspect
- Prime conclusioni
- Approfondimenti
- Fotoni e stati intrecciati
- PAUSA
- Sintesi e discussione

Origine delle correlazioni

Possibili origini classiche:

- **Scambio di informazioni.** Ma si sono osservate correlazioni su grandi distanze (1998 (Ginevra): 10,9 km) \implies ipotesi da scartare.
- **Stabilite alla sorgente.** Allora ogni particella della coppia “sa” già come dovrà reagire quando incontra un determinato tipo di apparecchio di misura e ciò **indipendentemente** dalle possibili misure effettuate sull'altra particella.

Teoria locale:

le due particelle della coppia sono **indipendenti** fra loro e quindi considerate come **entità separate**.

1964: Teorema di Bell \implies possibilità di testare le teorie locali (e quindi l'ipotesi)!!!

I due articoli di J.S. Bell

Rev. Mod. Phys. **38** (1966): *On the problem of hidden variables in quantum mechanics*

- discute le diverse posizioni finora invocate contro le variabili nascoste (VN);
- propone un modello per un singolo spin;
- mostra che per due spin un modello di VN in cui $\Psi \in \mathcal{H}$ non si fattorizza è *non locale*;
- si chiede se tutti i modelli di VN devono essere non locali.

Physics **1** (1964): *On the Eintein-Podolsky-Rosen paradox*

- presenta una disuguaglianza che deve essere soddisfatta da una teoria a VN locale;
- dimostra l'incompatibilità tra fisica quantistica e VN locali.

Il principio delle cause locali

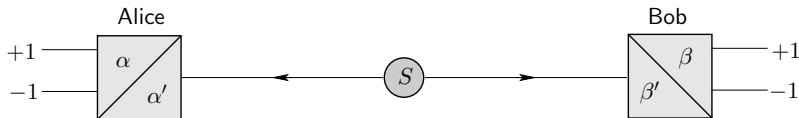
Il principio delle cause locali

Eventi che occorrono in una regione spaziotemporale data, non possono essere influenzati da una modifica di parametri localizzati in una regione spaziotemporale distante di un intervallo di tipo spazio.

Per esempio se Alice e Bob sono distanti L , rispetto ad un dato sistema di riferimento \mathcal{R} in cui sono entrambi immobili, e che la misura impiega un tempo τ , allora si esige che $\tau \ll L/c$.

Setup

Alice può eseguire due misure indicate con α e α' , come pure Bob le cui misure sono indicate β e β' . In tutti i casi si hanno solo due possibili risultati $+1$ e -1 .



La **località** corrisponde al fatto che i risultati di Alice a, a' **non** dipendono dalla misura fatta da Bob e quelli di Bob b, b' **non** dipendono dalla misura effettuata da Alice.

Variabili nascoste locali

- Se i risultati sono stabiliti alla sorgente (risultato preesiste alla misura: ipotesi del **realismo**), ogni particella lascia la sorgente con un lista

$$\lambda_A = \{a(\lambda), a'(\lambda)\} \quad \lambda_B = \{b(\lambda), b'(\lambda)\}$$

tale che $a = a(\lambda)$, $a' = a'(\lambda)$, $b = b(\lambda)$, $b' = b'(\lambda)$, così da spiegare le correlazioni. λ cambia da coppia a coppia.

- Un modello di **variabile nascosta locale** (VNL) prevede, e permette di stabilire, $a(\lambda)$, $a'(\lambda)$, $b(\lambda)$ e $b'(\lambda)$ per qualsiasi esperienza.
- $\lambda = \{\lambda_A, \lambda_B\}$ è chiamata **variabile nascosta locale**, non serve nel calcolo della fisica quantistica ma, nell'ipotesi che le correlazioni sono stabilite alla sorgente ne spiega le origini.
- La VNL λ ha lo scopo di **completare** la descrizione dello stato puro Ψ previsto dalla fisica quantistica.

Teorema di Bell

Teorema

Se la teoria è locale allora

$$S = (a + a')b + (a - a')b'$$

soddisfa

$$|\langle S \rangle| \leq 2 .$$

È la **variante CHSH della disuguaglianza di Bell** (1969).

Se le correlazioni sono stabilite alla sorgente, e più in generale se la teoria è locale, allora $|\langle S \rangle| \leq 2$.

Teorema di Bell: dimostrazione

- $S = S(\lambda)$ dipende dalla VNL: la media sulle coppie equivale alla media su λ , poiché ogni coppia ha in generale una variabile λ differente.
- Se $\rho(\lambda)$ è la distribuzione di probabilità di λ allora

$$\langle ab \rangle = \int \rho(\lambda) a(\lambda) b(\lambda) d\lambda .$$

- Abbiamo $S = \pm 2$, poiché: $a + a' = 0$ e quindi $a - a' = \pm 2$, oppure $a - a' = 0$ e quindi $a + a' = \pm 2$.
- Da cui

$$-2 \leq \langle S \rangle \leq +2 \implies |\langle S \rangle| \leq 2$$

Previsioni quantistiche

- Per il teorema di Bell dobbiamo calcolare dei termini del tipo $\langle ab \rangle$ poiché

$$|\langle S \rangle| = |\langle ab \rangle + \langle a'b \rangle + \langle ab' \rangle - \langle a'b' \rangle|$$

- Per due spin $1/2$ nello stato intrecciato

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+^1 \otimes \psi_-^2 - \psi_-^1 \otimes \psi_+^2)$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \langle ab \rangle &= (\Psi, \vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}^1 \otimes \vec{\beta} \cdot \vec{\sigma}^2 \Psi) = -\cos \angle(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha - \beta) \\ &= -\cos \theta \end{aligned}$$

- È possibile ottenere $|\langle S \rangle| = 2\sqrt{2}$.
- Quindi:
 - **La fisica quantistica viola le disuguaglianze di Bell.**
 - **La fisica quantistica è una teoria non locale.**

Previsioni quantistiche: dimostrazione

Scriviamo $\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}^1 \otimes \vec{\beta} \cdot \vec{\sigma}^2$ come $\sigma_\alpha^1 \otimes \sigma_\beta^2 = (\sigma_\alpha^1 \otimes I)(I \otimes \sigma_\beta^2)$ da cui

$$\langle ab \rangle = (\sigma_\alpha^1 \otimes I \Psi, I \otimes \sigma_\beta^2 \Psi).$$

Ψ può essere scritto in termini degli autovettori di tutte le osservabili σ_n , allora $\sigma_\alpha^1 \otimes I \Psi = \Phi_\alpha$ e $I \otimes \sigma_\beta^2 \Psi = -\Phi_\beta$ e quindi

$$I \otimes \sigma_\beta^2 \Psi = -\Phi_\beta = -\sigma_\beta^1 \otimes I \Psi$$

da cui

$$\begin{aligned} \langle ab \rangle &= -\langle \Psi, (\sigma_\alpha^1 \otimes I)(\sigma_\beta^1 \otimes I) \Psi \rangle = -\langle \Psi, \sigma_\alpha^1 \sigma_\beta^1 \otimes I \Psi \rangle \\ &= -\langle \Psi, (\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}^1)(\vec{\beta} \cdot \vec{\sigma}^1) \otimes I \Psi \rangle. \end{aligned}$$

Utilizzando l'uguaglianza $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma})(\vec{\beta} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} I + i(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) \cdot \vec{\sigma}$, otteniamo

$$\langle ab \rangle = -\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \langle \Psi, i(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) \cdot \vec{\sigma}^1 \otimes I \Psi \rangle = -\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$$

poiché $(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) \cdot \vec{\sigma}^1 \otimes I \Psi \perp \Psi$. Quindi $\langle ab \rangle = -\cos \theta$.

Il ruolo dell'ipotesi delle cause locali

È fondamentale capire **dove interviene il principio delle cause locali**.

Se supponiamo che a, a' possono dipendere dalla misura di Bob, e b, b' da quelle di Alice, allora

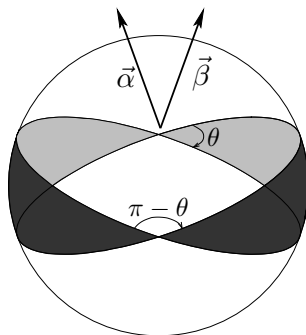
$$S = a_{(\beta)}b_{(\alpha)} + a'_{(\beta)}b_{(\alpha')} + a_{(\beta')}b'_{(\alpha)} - a'_{(\beta')}b'_{(\alpha')}$$

Abbiamo $S = 0, \pm 2, \pm 4$. Otteniamo la disuguaglianza

$$|\langle S \rangle| \leq 4$$

Correlazioni classiche

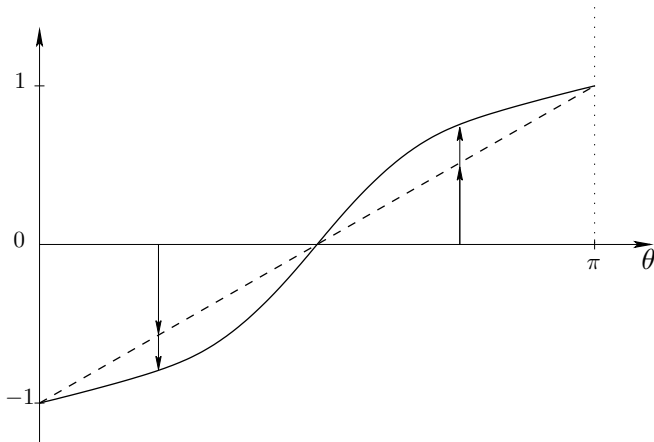
Calcolo classico



Nella zona grigia (di estensione angolare 2θ) $ab = +1$ e in quella bianca (di estensione angolare $2\pi - 2\theta$) $ab = -1$ si ha

$$\langle ab \rangle = \left[(+1) \frac{2\theta}{2\pi} + (-1) \frac{2(\pi - \theta)}{2\pi} \right] = \frac{2\theta - \pi}{\pi}$$

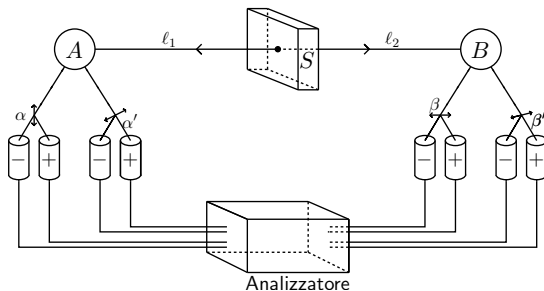
Confronto classico-quantistico



La correlazione quantistica sarà sempre più forte di quella classica.

Le esperienze di Aspect

1982: Esperienze di Aspect (con fotoni)



S = un atomo di Calcio produce una coppia di fotoni intrecciati. Gli elementi A e B (orientati aleatoriamente) dirigono i fotoni verso quattro apparecchi di misura, ciascuno di questi apparecchi rivela la polarizzazione dei fotoni lungo una direzione qualsiasi. I risultati ottenuti vengono infine analizzati dall' "analizzatore di correlazione".

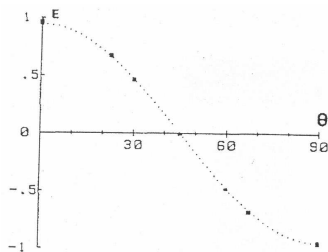
Risultati sperimentali

1982 (Orsay):

$$\langle S_{FQ} \rangle = 2,70$$

$$\langle S_{\text{sperimento}} \rangle = 2,697 \pm 0,015$$

Inoltre $\langle ab \rangle = \cos 2\theta$.



I risultati di questa esperienza sono in eccellente accordo con le predizioni quantistiche, e mostrano un'indiscutibile violazione delle disuguaglianze di Bell.

Le correlazioni non sono stabilite alla sorgente.

Loopholes

- **Locality loophole:** Le scelte di A e B devono essere separate da un intervallo di tipo spazio \Rightarrow loophole chiuso con fotoni ad Innsbruck (1998).
- **Detection loophole:** Se i detettori non sono efficienti, un modello (perverso) potrebbe spiegare i risultati \Rightarrow loophole chiuso con ioni a Boulder (2001).

\Rightarrow ... nessun esperimento ha chiuso entrambi i loophole assieme.

1998 (Innsbruck): per 14700 eventi raccolti in 10 s

$$\langle S_{\text{esperimento}} \rangle = 2,73 \pm 0,02$$

setup sperimentale in conformità con l'ipotesi delle cause locali.

2001 (Boulder):

$$\langle S_{\text{esperimento}} \rangle = 2,25 \pm 0,03$$

setup sperimentale con detettori di alta efficienza.

Considerazioni filosofiche

- **Nessuna teoria locale, ovvero di tipo classico, può essere utilizzata per spiegare le correlazioni osservate negli esperimenti.**
- Le correlazioni sono un **effetto puramente quantistico** che non ammette una spiegazione classica.
- Le correlazioni sono legate al fenomeno dell'**entanglement**.
- Non è possibile invocare un modello a variabili nascoste locali.

- **La teoria quantistica è quindi completa e la Natura è oggettivamente indeterministica** (a livello della misura).

Considerazioni filosofiche

Il teorema di Bell sancisce che **la fisica quantistica è una teoria non locale**, in cui quando due sistemi sono correlati è *impossibile descriverli come due entità separate*, e ciò *indipendentemente* dalla distanza che li separa, gli stati intrecciati rappresentano quindi una forma di **non località** e le correlazioni appaiono come un processo non locale. Cade qui il principio di località/separabilità della filosofia classica della Natura:

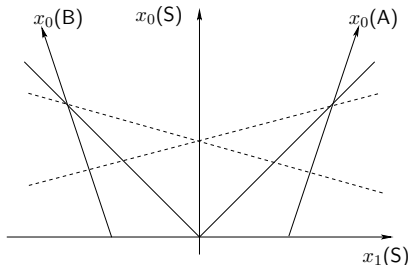
la Natura a livello microscopico è non locale/non separabile.

Ritorno allo scambio di informazione superliminare?

- “Scambio di informazione”: permette le correlazioni se gli eventi sono *ordinati temporalmente*.
- Fisica galileiana: tempo assoluto, ordine temporale univocamente definito in ogni SRI.
- Fisica lorentziana: tempo relativo al SRI, ordine temporale indefinito relativamente a più SRI.
- $v > c$ in un sistema di riferimento privilegiato *globale* (che definisce l'ordine temporale)?
 - $v = \infty$: modello di de Broglie-Bohm (onda pilota): posizione “filosofica” particolare, stesse previsioni della FQ;
 - $v < \infty$: problema aperto (esistono dei modelli, ma non dei risultati sperimentali)!

Ritorno allo scambio di informazione superliminare?

- $v > c$ in un sistema di riferimento associato ad un device (detettore o beam splitter)? Modello **multisimultaneity** di Suarez-Scarani (1997):
 - suppone che le correlazioni sono stabilite con uno scambio di informazione in una configurazione di non località;
 - permette di studiare gli eventi *before-before* ossia in cui la particella 1 relativamente al SRI del suo device è “analizzata” prima della particella 2, e viceversa: in questo caso le correlazioni dovrebbero sparire.



Ritorno allo scambio di informazione superliminare?

Sul modello Suarez-Scarani.

- L'informazione con $v > c$, responsabile delle correlazioni, è detta *quantum information* e non può essere utilizzata per comunicare ($v \approx 10^4 c - 10^7 c$).
- Modello falsificato a Ginevra (2001 e 2002).
- Conclusione: le correlazioni sono direttamente legate all'entanglement in modo tale da **non** poter considerare un evento la "causa" e l'altro l'"effetto".
- Quale statuto per il **postulato della riduzione dello stato** (collasso della funzione d'onda)?

L'argomento GHZ

- GHZ (1990): un altro risultato come test del realismo locale.
- Stato intrecciato a tre fotoni:

$$|\text{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_1 |H\rangle_2 |H\rangle_3 + |V\rangle_1 |V\rangle_2 |V\rangle_3)$$

- Nello stato GHZ si ottiene una contraddizione tra fisica quantistica e realismo locale.
- L'esperienza (2000) conferma la fisica quantistica e la violazione del realismo locale della Natura.

Polarizzazione dei fotoni

- La **polarizzazione del fotone** è una sua proprietà intrinseca.
- Sia sul piano empirico che formale è “isomorfo” al sistema spin $1/2$.
- Una sorgente di fotoni permette di inviare una particella alla volta in una data direzione lungo la quale il fotone incontra un apparecchio di misura (un polarizzatore/analizzatore).

Due risultati possibili:

- il fotone, dopo avere interagito con il filtro polarizzatore, lo attraversa e viene successivamente rilevato;
 - il fotone passante attraverso il polarizzatore viene assorbito da esso senza poter essere quindi rilevato.
- *Sistema a due livelli* e quindi

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{A} \subset \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) .$$

Polarizzazione dei fotoni

- La **polarizzazione lineare** H/V (orizzontale/verticale).

$$\pi_z = \frac{1}{2}(\sigma_z + 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori 1 e 0 sono associati agli autovettori (**base** Z)

$$|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |V\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- La **polarizzazione lineare** H'/V' ($+45^\circ/-45^\circ$).

$$\pi_x = \frac{1}{2}(\sigma_x + 1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori 1 e 0 sono associati agli autovettori (**base** X)

$$|H'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |V'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Polarizzazione dei fotoni

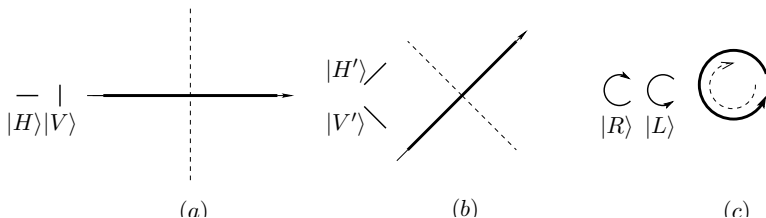
- La **polarizzazione circolare** R/L .

$$\pi_y = \frac{1}{2}(\sigma_y + 1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori 1 e 0 sono associati agli autovettori (**base** Y)

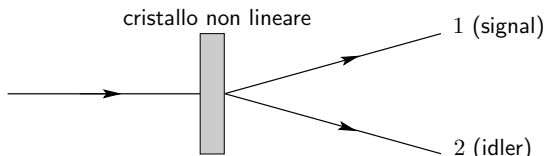
$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} .$$

Polarizzazione dei fotoni



(a) Orientazione del polarizzatore (indicato in grassetto) associata all'osservabile π_z , con i relativi stati di polarizzazione espressi dagli autovettori $|H\rangle$ e $|V\rangle$. (b) Una rotazione di $+45^\circ$ del polarizzatore rispetto alla situazione (a) ci riconduce all'orientazione descritta dall'osservabile π_x (incompatibile con π_z); gli autostati ad essa associati sono indicati in figura da $|H'\rangle$ e $|V'\rangle$. (c) La situazione descrive schematicamente la polarizzazione circolare (legata all'osservabile π_y , alla quale si riconducono gli autostati $|R\rangle$ (*right*) e $|L\rangle$ (*left*)).

Spontaneous parametric down conversion (tipo II)

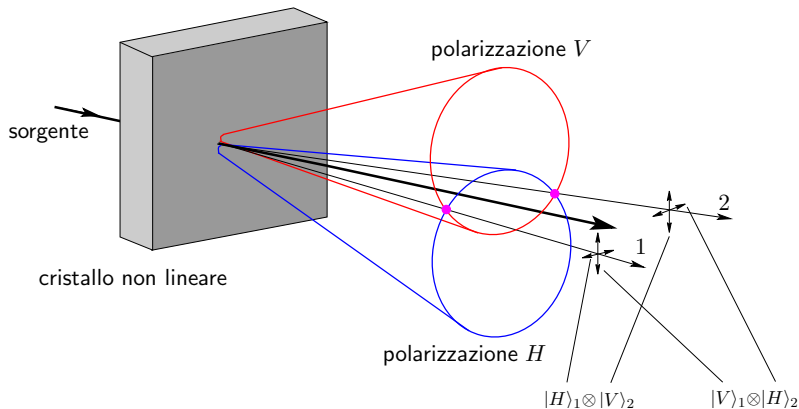


- Fotoni emessi su due coni di polarizzazione H e V .
- Se i due coni si intersecano i fotoni emessi lungo le direzioni 1 e 2 hanno le loro polarizzazioni indeterminate. Poiché è *di principio* impossibile determinare che polarizzazione hanno corrisponde ad uno stato intrecciato

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|H\rangle_1 \otimes |V\rangle_2 + e^{i\varphi} |V\rangle_1 \otimes |H\rangle_2 \right]$$

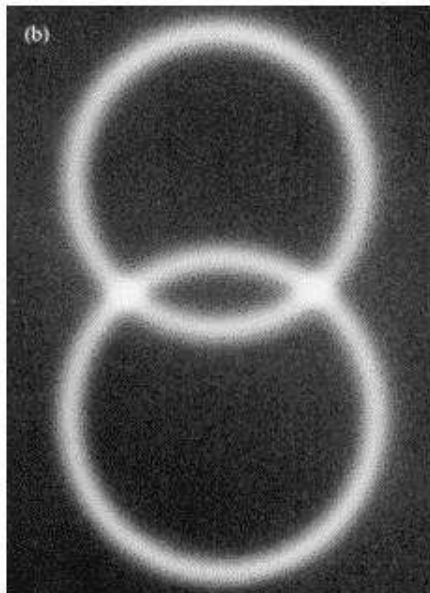
- La fase è determinata dal cristallo e può essere scelta in modo voluto, per esempio $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi$.

Spontaneous parametric down conversion (tipo II)



Altra possibilità: **entanglement swapping**.

Spontaneous parametric down conversion (tipo II)



Sintesi

Realismo fisico classico

- **determinismo causale**: in ogni istante una grandezza fisica qualsiasi assume un valore determinato riconducibile ad un suo valore ad un istante precedente qualsiasi, tramite una legge causale;
- **separabilità/località**: la separazione nello spazio legittima l'individuazione dei sottosistemi.

Visione quantistica della Natura

- **probabilità oggettive** (stati puri) e processo di misura “discontinuo”;
- **non separabilità/non località**: entanglement e teorema di Bell.

Alcune direzioni

Interpretazione \iff **FQ** \implies Ricadute tecnologiche

Non località

- Emergenza delle proprietà classiche (decoerenza)?
- Quantum computer, teletrasporto, crittografia.

Probabilità e misura

- Oggettività?
- Crittografia.

It is a great time for quantum physics.

Both its foundations and its potential applications are deeply explored by a growing community of physicists, mathematicians, computer scientists, and philosophers.

Bibliografia

- A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, *Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rose-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities*, Phys. Rev. Lett. **49** (1982)
- A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, *Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers*, Phys. Rev. Lett. **49** (1982)
- A. Aspect, *Bell's Inequalities test: more ideal than ever*, Nature **398** (1999)
- J.S. Bell, *On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics*, Rev. Mod. Phys. **38** (1966)
- J.S. Bell, *On the Eintein Podolsky Rosen paradox*, Physics **1** (1964)
- N. Brunner *et al.*, *Direct Measurement of Superluminal Group Velocity and Signal Velocity in an Optical Fiber*, Phys. Rev. Lett. **90** (2004)
- J.F. Clauser *et al.*, *Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories*, Phys. Rev. Lett. **23** (1969)

Bibliografia

- D.M. Greenberger, M.A. Horne, A. Zeilinger, *Bell's Theorem without Inequalities and Beyond: in Quantum Measurements in Optics*, Plenum (1990)
- P.G. Kwiat *et al.*, *New high-intensity source of polarization entangled photons pairs*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995)
- J.-W. Pan *et al.*, *Experimental test of quantum nonlocality in three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement*, Nature **403** (2000)
- A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Kluwer (1995)
- M.A. Rowe *et al.*, *Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection*, Nature **409** (2001)
- V. Scarani, *Interférences et corrélations quantiques*, Vuibert (2003)
- V. Scarani, *"Reasonable" Models & Quantum Correlations*, presentazione ppt (2007)

Bibliografia

- A. Suarez, V. Scarani, *Does entanglement depend on the timing of the impacts at the beam-splitters?*, Phys. Lett. A **232** (1997)
- V. Scarani, N. Gisin, *Superluminal influences, hidden variables, and signaling*, Phys. Rev. A **295** (2002)
- A. Stefanov *et al.*, *Quantum correlations with spacelike separated beam splitters in motion: experimental test of multisimultaneity*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002)
- W. Tittel *et al.*, *Violation of Bell Inequalities by Photons More Than 10 km Apart*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998)
- G. Weihs *et al.*, *Violation of Bell's inequality under strict Einstein locality conditions*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998)
- H. Zbinden *et al.*, *Experimental test of nonlocal quantum correlation in relativistic configurations*, Phys. Rev. A **63** (2001)