

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
INSTITUT DE PHYSIQUE THÉORIQUE

**Dynamique d'une particule quantique
dans un champ magnétique inhomogène**

Travail de diplôme

Christian Ferrari

sous la direction du
Professeur Philippe A. Martin
et du Docteur Nicolas Macris

Octobre 1998 - Février 1999

Il libro della natura è scritto in lingua matematica

Galileo Galilei

Avant-propos

Dans ce travail, on étudie des opérateurs de Schrödinger en présence d'un champ magnétique, plus précisément deux types d'hamiltoniens magnétiques bidimensionnels non relativistes (le champ magnétique étant perpendiculaire au plan).

Ces deux types d'opérateurs se différencient essentiellement par le choix du champ magnétique. Pour le premier type d'hamiltonien, on prend un champ magnétique inhomogène selon une direction d'espace; tandis que pour le deuxième type, on considère un champ homogène. Dans ce deuxième cas on ajoute aussi un mur confinant le système selon une direction (le système est donc semi-infini).

Dans un deuxième temps, on ajoute un potentiel "perturbatif", aléatoire ou déterministe, "simulant" la présence d'impuretés dans le système.

L'étude de ces opérateurs peut être vu comme un travail mathématique en soi. Mais, du point de vue physique, le cas avec champ homogène et mur présente un lien avec l'étude microscopique de la théorie de l'effet Hall quantique.

Mentionnons que le cas avec champ inhomogène a été étudié seulement sans impuretés [7], [13], [3]; tandis que le cas relié à l'effet Hall a déjà été traité en entier [12], [20].

Le résultat principal de ce travail est la preuve de la stabilité d'une partie du spectre continu des hamiltoniens non perturbés, sous l'effet de l'adjonction d'une perturbation, pourvu que celle-ci ne soit pas trop grande. Pour le cas du champ magnétique inhomogène, il s'agit d'un résultat original, tandis que pour l'autre cas, on trouve essentiellement le même résultat que [12], mais sous des conditions moins restrictives.

L'originalité de ce travail est l'utilisation d'une nouvelle méthode pour déterminer, sous des conditions assez générales, l'absence de la partie purement ponctuelle du spectre de l'hamiltonien.

Cette technique se base sur l'existence d'un commutateur qui peut être

relié à la dérivée des branches spectrales, associées à l'hamiltonien non perturbé.

On donne maintenant la structure de ce travail.

Au chapitre 1, on définit précisément les deux modèles étudiés. Le chapitre 2 est consacré à la caractérisation des branches spectrales associées aux hamiltoniens non perturbés.

Le chapitre 3, qui traite le cas avec champ magnétique inhomogène perturbé, peut être considéré comme le coeur de ce travail. Premièrement, on met en oeuvre la nouvelle technique, et on montre ainsi l'absence de spectre purement ponctuel dans certains intervalles. Ensuite, on montre que dans ces derniers il y a du spectre, d'où la conclusion que le spectre y est purement continu.

Au chapitre 4, on applique les idées du chapitre précédent au cas avec champ homogène et mur. On trouve que si la perturbation est assez petite alors, entre les niveaux de Landau, le spectre est purement continu.

Le chapitre 5 présente une généralisation du chapitre 3, et donne quelques idées sur l'utilisation de la nouvelle méthode conçue.

Suite à ce travail mathématique, on s'intéresse aux liens des résultats obtenus avec la physique, c'est l'objet du chapitre 6.

On expose d'abord quelques idées sur le liens entre la caractérisation des parties spectrales d'un hamiltonien, et le phénomène de la localisation. On regarde ensuite la connexion entre la physique de l'effet Hall quantique et l'étude du système avec champ magnétique homogène. On expose brièvement l'effet physique considéré, et ensuite, sur la base du fameux article de Halperin [6], on discute la connexion entre ses idées et les résultats mathématiques établis au chapitre 4.

Enfin, dans l'annexe B, on donne une description stochastique pour le potentiel perturbatif.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Avant-propos | i |
| 1 Les systèmes étudiés | 1 |
| 1.1 Modèle avec B inhomogène | 1 |
| 1.2 Modèle avec mur | 2 |
| 2 Étude des branches spectrales | 4 |
| 2.1 Réduction à un problème unidimensionnel | 4 |
| 2.2 Non dégénérescence et analyticité | 5 |
| 2.3 Limites asymptotiques | 9 |
| 2.3.1 Modèle avec B inhomogène | 9 |
| 2.3.2 Modèle avec mur | 10 |
| 2.4 Monotonie | 10 |
| 2.4.1 Modèle avec B inhomogène | 10 |
| 2.4.2 Modèle avec mur | 11 |
| 2.5 Spectre absolument continu des H_0 | 11 |
| 3 Modèle avec B inhomogène: effet des impuretés et stabilité du spectre continu | 13 |
| 3.1 Introduction | 13 |
| 3.2 Absence de spectre ponctuel | 14 |
| 3.3 Existence du spectre | 25 |
| 4 Modèle avec mur: effet des impuretés et stabilité du spectre continu | 30 |
| 4.1 Introduction | 30 |
| 4.2 Absence de spectre ponctuel | 31 |
| 4.3 Existence du spectre | 36 |
| 5 Une généralisation: Champ inhomogène avec mur | 37 |
| 5.1 Introduction | 37 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5.2 | Branches spectrales | 37 |
| 5.3 | Stabilité du spectre continu | 39 |
| 5.4 | Généralisations et perspectives | 40 |
| 6 | Considérations physiques | 43 |
| 6.1 | Localisation, délocalisation et systèmes désordonnés | 43 |
| 6.1.1 | États localisés et délocalisés | 43 |
| 6.1.2 | Effet du désordre et localisation | 44 |
| 6.1.3 | Commentaire des résultats | 45 |
| 6.2 | Effet Hall quantique | 45 |
| 6.2.1 | Effet Hall quantique entier | 45 |
| 6.2.2 | Effet des impuretés | 47 |
| 6.2.3 | Existence de courants de bord et connexion avec le modèle avec mur | 47 |
| A | Décomposition en intégrale directe | 53 |
| B | Hamiltonien aléatoire | 56 |
| C | Quelques résultats sur le modèle avec B inhomogène lorsque $B_+ > 0 > B_-$ | 59 |
| | Références | 65 |
| | Remerciements | 67 |

Chapitre 1

Les systèmes étudiés

Dans ce travail on étudie deux modèles qui décrivent la dynamique d'un électron dans le plan (x,y) lorsqu'il est soumis à un champ magnétique perpendiculaire à ce plan. Par simplicité, on ne considère pas le spin de l'électron.

Dans le premier modèle le champ magnétique est pris inhomogène dans la direction x . Tandis que dans le deuxième le champ est homogène mais on ajoute un potentiel répulsif dans la direction $x > 0$ qui confine la particule dans cette direction.

On va appeler ces deux modèles *Modèle avec B inhomogène* et *Modèle avec mur*.

Le but de ce travail est d'abord d'étudier les spectres (qui, on verra, sont absolument continus) des hamiltoniens correspondants à ces modèles, et ensuite, ce qui est la partie centrale, regarder la stabilité du spectre continu sous l'effet d'impuretés étendues représentées par un potentiel borné.

1.1 Modèle avec B inhomogène

On va considérer un champ magnétique inhomogène qui ne dépend que de la variable x , on a donc $B(x,y) = B(x)$, et on fixe les deux conditions aux limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} B = B_{\pm}$$

avec $B_+ \neq B_-$ non nuls.

Remarquons que selon les signes de B_+ et B_- on a des comportements différents, il faut donc considérer séparément les deux cas suivants:

1. Champs asymptotiques de mêmes signes, $B_+ > B_- > 0$,
2. Champs asymptotiques de signes différents, $B_+ > 0 > B_-$.

Dans le cadre de ce travail on ne considère que le premier cas (le cas “symétrique” $0 > B_+ > B_-$ se traite de façon similaire). Dans l’annexe C on donne quelques petits résultats au sujet du deuxième cas.

Les **hypothèses** suivantes sont faites¹:

1. $B \in C^\infty(\mathbb{R})$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\frac{dB(x)}{dx} > 0$,
2. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} B(x) = B_\pm$, avec $B_+ > B_- > 0$.

Regardons maintenant l’hamiltonien qui décrit ce modèle. Pour un champ magnétique $B \in C^\infty(\mathbb{R})$ le potentiel vecteur $A \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ satisfait la relation

$$B = \partial_x A_y - \partial_y A_x .$$

On choisit la jauge de Landau $A(x,y) = (0, A_y(x))$ où

$$A(x) \doteq A_y(x) = \int_0^x B(\xi) d\xi .$$

L’hamiltonien (sans impuretés) à étudier, qui agit dans l’espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2)$, est donc

$$H_0 = p_x^2 + (p_y - A)^2 \tag{1.1}$$

avec $p_x = -i\partial_x$, $p_y = -i\partial_y$. H_0 est essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ [16, thm. X.34], les fonctions de classe C^∞ à support compact sont donc un coeur pour H_0 . L’hamiltonien avec impuretés est obtenu en ajoutant un potentiel W qui représente l’effet de ces dernières, on a ainsi

$$H = H_0 + W . \tag{1.2}$$

Ensuite, on impose la condition suivante sur le potentiel W

$$\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |W(x,y)| = W_0 < \infty ,$$

donc H est encore essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ car W est borné.

1.2 Modèle avec mur

Le cas simple où on n’a pas de mur et un champ B constant correspond au *problème de Landau*, où l’hamiltonien est donné par

$$H_L = p_x^2 + (p_y - Bx)^2$$

1. Dans la suite la validité de ces hypothèses sera admise tacitement.

le spectre est infiniment dégénéré (donc essentiel)

$$\sigma(H_L) = \sigma_{ess}(H_L) = \{(2n + 1)B \mid n \in \mathbb{N}\} .$$

On ajoute alors un mur dans le demi-plan des $x > 0$ qui est représenté par le potentiel U suivant

$$U(x) = \begin{cases} V(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

avec $V \in C^1(\mathbb{R}_+)$ et $V(x) \geq 0$ ainsi que $\frac{dV(x)}{dx} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Des exemples pour le potentiel V sont:

- Mur polynômial: $V(x) = \mu x^\gamma$, $\mu > 0$, $\gamma \geq 1$,
- Mur exponentiel: $V(x) = e^{\alpha x} - 1$, $\alpha > 0$.

Remarquons qu'on pourrait aussi considérer un saut de potentiel donné par le potentiel $V(x) = V_0(1 - e^{-\alpha x})$, $V_0 > 0$, $\alpha > 0$.

Ce modèle correspond physiquement à un système Hall semi-infini (voir le chapitre consacré aux considérations physiques).

Comme pour le modèle avec B inhomogène on se place dans la jauge de Landau, et le potentiel vecteur est ici simplement $(0, A_y)$ avec

$$A_y(x) = Bx .$$

Dans ce cas l'hamiltonien non perturbé avec un mur U est

$$H_0 = p_x^2 + (p_y - Bx)^2 + U , \tag{1.3}$$

après avoir ajouté les impuretés on doit étudier

$$H = H_0 + W \tag{1.4}$$

avec la même condition qu'au paragraphe précédent. Ces hamiltoniens sont aussi essentiellement auto-adjoints sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Chapitre 2

Étude des branches spectrales

2.1 Réduction à un problème unidimensionnel

Soit H_0 l'hamiltonien (1.1) ou (1.3). On commence par remarquer que $[H_0, p_y] = 0$; d'où il suit que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $[H_0, U(a)] = 0$, avec $U(a)$ la représentation unitaire (fortement) continue des translations selon y . On peut donc (en passant en Fourier par rapport à la variable y) décomposer H_0 en une intégrale directe d'opérateurs unidimensionnels $H_0(k)$ (voir l'annexe A)

$$H_0 = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H_0(k) dk$$

avec

$$H_0(k) = p_x^2 + (k - A)^2 \doteq p_x^2 + V_k^{(1)} \quad (2.1)$$

pour le cas du premier modèle, et

$$H_0(k) = p_x^2 + (k - Bx)^2 + U \doteq p_x^2 + V_k^{(2)} \quad (2.2)$$

pour le deuxième.

Comme $V_k^{(\alpha)}(x) \rightarrow +\infty$ pour $|x| \rightarrow \infty$ ($\alpha = 1, 2$), $H_0(k)$ a un spectre purement ponctuel et un ensemble complet de fonctions propres (voir le théorème 2.1 qui suit). Pour chaque $k \in \mathbb{R}$ on a donc le problème unidimensionnel

$$H_0(k)\varphi_{n,k} = E_n(k)\varphi_{n,k}.$$

On définit alors les branches spectrales comme suit: pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$\begin{aligned} E_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ k &\longmapsto E_n(k) \end{aligned}$$

défini une branche spectrale.

Une question importante pour l'étude du spectre d'un hamiltonien décomposable et la mise en oeuvre de la méthode utilisée pour l'analyse du cas avec impuretés, est la connaissance du comportement des branches spectrales. Il s'agit donc de caractériser au mieux les fonctions E_n .

2.2 Non dégénérescence et analyticité

On commence par généraliser la première partie du lemme 2.3 de [7] qui donne le résultat du théorème 2.1 ci-dessous, dans le cas particulier de l'hamiltonien $H(k) = -\frac{d^2}{dx^2} + (k - A)^2$ avec un champ magnétique $B = B(x)$ qui a des limites asymptotiques B_{\pm} de signe positif.

Théorème 2.1. *Soit $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V$ un opérateur auto-adjoint. Supposons que V satisfait*

1. $V \geq 0$ et $V \in C(\mathbb{R})$,
2. $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$,

en plus supposons qu'il existe $x_-, x_+ \in \mathbb{R}$ tels que

3. $\frac{dV(x)}{dx} > 0$ pour $x \in (x_+, \infty)$ et $\frac{dV(x)}{dx} < 0$ pour $x \in (-\infty, x_-)$;

alors il existe une base orthonormale $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}(H)$ (le domaine de H) tel que $H\varphi_n = E_n\varphi_n$ et les valeurs propres sont non dégénérées.

La preuve du théorème 2.1 se base sur le lemme suivant [7] pour la non dégénérescence, et sur un résultat général pour ce qui concerne la caractérisation du spectre.

Lemme 2.1. *Soit $I = [x_0, \infty)$ (respectivement $(-\infty, x_0]$), $q \in C(I)$ avec $q(x) \geq 0$ pour $x \in I$ et $\varphi \in C^2(I)$ solution du problème*

$$\varphi''(x) = q(x)\varphi(x), \quad x \in I \tag{2.3}$$

avec $\varphi \in L^2(I)$ et $\varphi \not\equiv 0$, alors

$$\varphi(x)\varphi'(x) < 0, \quad x \in I$$

(respectivement $\varphi(x)\varphi'(x) > 0$, $x \in I$).

PREUVE. Considérons le cas $I = [x_0, \infty)$.

On commence par remarquer que

$$(\varphi\varphi')' = (\varphi')^2 + \varphi\varphi'' \stackrel{(2.3)}{=} (\varphi')^2 + q\varphi^2 \geq 0$$

donc $\varphi\varphi'$ est monotone croissante sur I .

Montrons que le produit $\varphi\varphi'$ doit satisfaire $\varphi(x)\varphi'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ dès que l'on impose $\varphi \in L^2(I)$ et $\varphi \not\equiv 0$.

(1): Supposons qu'il existe $\bar{x} \in I$ tel que $\varphi(\bar{x}) = 0$, alors, si $\varphi'(\bar{x}) = 0$ on a $\varphi \equiv 0$; supposons donc $\varphi'(\bar{x}) > 0$ et par continuité pour $x \in (\bar{x}, \bar{x} + \delta)$ ($\delta > 0$ petit) $\varphi(x) > 0$. Par la monotonie de $\varphi\varphi'$ (nul en \bar{x}) on a

$$\varphi(x)\varphi'(x) > 0, \quad x > \bar{x}.$$

Vu la positivité de $\varphi(x)$ pour $x > \bar{x}$ on a $\varphi''(x) = q(x)\varphi(x) \geq 0$, pour $x > \bar{x}$, ce qui montre la monotonie de φ' , d'où $\varphi'(x) \geq \varphi'(\bar{x}) = c > 0$ ce qui donne, après intégration entre \bar{x} et x ,

$$\varphi(x) \geq c(x - \bar{x}), \quad x > \bar{x}$$

et donc $\varphi \notin L^2(I)$. Un raisonnement analogue pour le cas $\varphi'(\bar{x}) < 0$ montre que ($c > 0$)

$$\varphi(x) \leq -c(x - \bar{x}), \quad x > \bar{x}$$

d'où la conclusion que φ ne peut pas s'annuler dans I .

(2): Supposons donc $\varphi(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Si il existe $\bar{x} \in I$ tel que $\varphi'(\bar{x}) \geq 0$ alors par la monotonie de $\varphi\varphi'$ on a

$$\varphi(x)\varphi'(x) \geq 0, \quad x \geq \bar{x}$$

et donc $\varphi'(x) \geq 0$ pour $x \geq \bar{x}$, d'où

$$\varphi(x) \geq \varphi(\bar{x}) > 0, \quad x \geq \bar{x}$$

ainsi $\varphi \notin L^2(I)$. Un raisonnement analogue pour le cas $\varphi(x) < 0$ et $\varphi'(\bar{x}) \leq 0$ montre que

$$\varphi(x) \leq \varphi(\bar{x}) < 0, \quad x \geq \bar{x}$$

d'où la même conclusion.

Ainsi on doit avoir $\varphi(x)\varphi'(x) < 0$ pour tout $x \in I$. □

Lemme 2.2. Soit $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V$ un opérateur auto-adjoint qui satisfait les mêmes hypothèses du théorème 2.1. Alors il existe une base orthonormale $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}(H)$ tel que $H\varphi_n = E_n\varphi_n$; en plus la résolvante $(H - z)^{-1}$ ($z \in \rho(H)$) de H est compacte.

PREUVE. Si on montre que

$$F_H = \{\psi \in \mathcal{D}(H) \mid \|\psi\| \leq 1; \|H\psi\| \leq b\}$$

est compact pour tout b , alors on a le résultat cherché [17, thm. XIII.64].

(1): Montrons que F_H est fermé. Soit donc $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans F_H qui converge (fortement) vers ψ , montrons que $\psi \in F_H$. On a clairement

$$\|\psi\| = (\psi, \psi)^{1/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\psi_n, \psi_n)^{1/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n\| \leq 1.$$

Pour montrer que $\|H\psi\| \leq b$ il suffit de voir que pour $\lambda < \infty$ on a $\|HP_{(-\infty, \lambda)}\psi\| \leq b$ avec P_Ω la famille de projecteurs spectraux de H , car $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|HP_{(-\infty, \lambda)}\psi\| = \|H\psi\|$. Ceci se voit comme suit: on utilise le fait que $s - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \psi_\lambda = \psi$ (où on a posé $\psi_\lambda \doteq P_{(-\infty, \lambda)}\psi$), et on peut alors écrire (on pose ici $P_\lambda \doteq P_{(-\infty, \lambda)}$)

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \{ \|HP_\lambda\psi\|^2 - \|H\psi\|^2 \} &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \{ (\psi, P_\lambda H^2 P_\lambda \psi) - (\psi, H^2 \psi) \} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (H^2 \psi, (\psi_\lambda - \psi)) = 0. \end{aligned}$$

Comme $HP_{(-\infty, \lambda)}$ est borné, on a

$$\|HP_{(-\infty, \lambda)}\psi\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|HP_{(-\infty, \lambda)}\psi_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|H\psi_n\| \leq b$$

ce qui donne l'inégalité cherchée car on a une borne uniforme en λ , F_H est donc fermé.

(2): Montrons que F_H est contenu dans un ensemble compact, ce qui implique (avec le point (1)) sa compacité.

$\psi \in F_H$ si et seulement si $\|\psi\| \leq 1$ et $\|H\psi\| \leq b$ ce qui implique, vu la positivité de H ,

$$\|H\psi\| \leq b \Rightarrow \|\psi\| \|H\psi\| \leq b \Rightarrow (\psi, H\psi) \leq b \Rightarrow \begin{cases} (\psi, -\frac{d^2}{dx^2}\psi) \leq b \\ (\psi, V\psi) \leq b \end{cases}$$

et donc on voit que si $\psi \in F_H$ alors $\psi \in S$ ($F_H \subset S$) avec

$$S = \left\{ \psi \mid \|\psi\| \leq 1; \int p^2 |\hat{\psi}(p)|^2 dp \leq b; \int V(x) |\psi(x)|^2 dx \leq b \right\}$$

où $\hat{\psi}$ est la transformée de Fourier de ψ .

Comme $p^2 \rightarrow \infty$ et $V \rightarrow \infty$ par le critère de Rellich [17, thm. XIII.65] on a que S est compact. Ceci conclut la preuve. \square

PREUVE DU THÉORÈME 2.1. Le lemme 2.2 assure que le spectre de H est ponctuel. Montrons qu'il n'est pas dégénéré.

Pour tout E considérons l'opérateur différentiel $L = H - E$, alors l'équation $L\varphi = 0$ est l'équation aux valeurs propres pour H . L étant un opérateur différentiel du deuxième ordre, on a $\dim \text{Ker}(L) = 2$.

Montrons alors qu'il ne peut pas exister deux solutions linéairement indépendantes dans $L^2(I)$.

Soit $q(x) = V(x) - E$. Comme V est strictement croissant pour $x > x_+$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$ il existe $x_0 \geq x_+$ tel que pour tout $x \geq x_0$ $q(x) \geq 0$; on peut donc appliquer le lemme 2.1. Supposons ψ_1 et ψ_2 deux solutions linéairement indépendantes dans l'espace $L^2(I)$ et montrons qu'on aboutit à une contradiction. Supposons $\psi_i(x_0) \neq 0$ ($i = 1, 2$) (si $\psi_i(x_0) = 0$ par le lemme 2.1 on a que $\psi_i \notin L^2(I)$), alors, si on pose $\varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\psi_i(x_0)}$, en $x = x_0$ on a

$$(\varphi_1(x_0); \varphi_1'(x_0)) = (1; \alpha_1) \quad , \quad (\varphi_2(x_0); \varphi_2'(x_0)) = (1; \alpha_2) .$$

Par le lemme 2.1 il faut que $\alpha_1, \alpha_2 < 0$, ainsi que

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &> 0 \\ \varphi_i'(x) &< 0 \end{aligned}$$

pour tout $x > x_0$ ($i = 1, 2$), ceci entraîne

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_i(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_i'(x) &= 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

pour avoir $\varphi_i \in L^2(I)$ ($i = 1, 2$). Or le wronskien $W[\varphi_1, \varphi_2]$ de φ_1 et φ_2 satisfait l'équation [2, §2.5.1]

$$\frac{dW[\varphi_1, \varphi_2]}{dx}(x) = 0$$

et il est donc constant, mais par (2.4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) = 0$, donc $\varphi_1 = \varphi_2$, d'où contradiction.

Soient maintenant ψ_1 et ψ_2 deux solutions de $L\psi = 0$ sur \mathbb{R} , si elles sont dans $L^2(\mathbb{R})$ alors elles sont linéairement dépendantes car sur I , $\psi_1 = \mu\psi_2$ ($\mu \neq 0$), et donc $W[\psi_1, \psi_2](x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. \square

Le théorème 2.1, qu'on vient de prouver, permet de donner les deux premières propriétés des branches spectrales.

Proposition 2.1. *Pour les deux hamiltoniens (2.1) et (2.2) on a:*

1. les valeurs propres $E_n(k)$ sont non dégénérées, pour tout $k \in \mathbb{R}$,
2. les fonctions $E_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont analytiques pour tout $n \in \mathbb{N}$,

3. les fonctions propres $\varphi_{n,\cdot} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ sont analytiques pour tout $n \in \mathbb{N}$.

PREUVE. *Point 1.* Une simple application du théorème 2.1 avec $V(x) = V_k^{(\alpha)}(x)$ ($\alpha = 1, 2$) et $E = E_n(k)$.

Points 2./3. Pour les hamiltoniens (1.1) et (1.3), la famille $\{H_0(k)\}_{k \in \mathbb{R}}$ est une famille analytique dans le sens de Kato car:

1. $\rho(H_0(k)) = \mathbb{C} \setminus \sigma(H_0(k)) \neq \emptyset$, et $H_0(k)$ est fermé (trivial),
2. la résolvante $R(\lambda_0)$ ($\lambda_0 \in \rho(H_0(k))$) est une fonction à valeur opératorielle qui est rationnelle en k avec $H_0(k) - \lambda_0 \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{R}$ ce qui implique que $R(\lambda_0)$ est analytique en k .

Par le théorème de Kato-Rellich [17, thm. XII.8] il suit que, pour tout $k \in \mathbb{R}$, les fonctions E_n et vecteurs propres $\varphi_{n,\cdot}$ sont analytiques en k . \square

Remarque La proposition 2.1 montre que les branches spectrales ne peuvent pas se croiser, et qu'elles sont des fonctions analytiques, donc si elles sont constantes dans un ouvert, elles le sont sur \mathbb{R} .

2.3 Limites asymptotiques

2.3.1 Modèle avec B inhomogène

Les limites asymptotiques pour ce modèle sont étudiés dans [7], on reporte ici le résultat suivant (voir remarque finale dans [7]).

Proposition 2.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a les limites suivantes*

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} E_n(k) = (2n + 1)B_{\pm}.$$

On peut se convaincre de ce résultat (on pose $H_k \doteq H_0(k)$) en remarquant que pour tout $k \in \mathbb{R}$ l'hamiltonien H_k (2.1) est unitairement équivalent à

$$\tilde{H}_k = U_k H_k U_k^{-1} = p_x^2 + \left(k - A \left(x + \frac{k}{B(k)} \right) \right)^2$$

avec $U_k = e^{-ip_x(-k/B(k))}$; on peut donc caractériser les propriétés spectrales de H_k à l'aide de ce nouvel hamiltonien. Or, comme dans la limite $k \rightarrow \pm\infty$, on a

$$A \left(x + \frac{k}{B(k)} \right) = B_{\pm} x + k,$$

l'hamiltonien est celui d'un oscillateur harmonique de pulsation B_{\pm} , donc $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} E_n(k) = (2n + 1)B_{\pm}$.

2.3.2 Modèle avec mur

Pour ce modèle on reporte le résultat de [12].

Proposition 2.3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a les limites suivantes*

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow -\infty} E_n(k) &= (2n + 1)B \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} E_n(k) &= +\infty . \end{aligned}$$

Le même argument qui suit la proposition 2.2 s'applique ici; l'hamiltonien H_k (2.2) est unitairement équivalent à

$$\tilde{H}_k = U_k H_k U_k^{-1} = p_x^2 + B^2 x^2 + U\left(x + \frac{k}{B}\right) ,$$

avec $U_k = e^{-ip_x(-k/B)}$. Dans la limite $k \rightarrow -\infty$ on a $U\left(x + \frac{k}{B}\right) \rightarrow 0$ et on a donc l'oscillateur harmonique de pulsation B ; pour la limite $k \rightarrow +\infty$ on remarque que le potentiel $U\left(x + \frac{k}{B}\right)$ diverge.

2.4 Monotonie

2.4.1 Modèle avec B inhomogène

La question de la monotonie des branches spectrales pour le modèle avec champ inhomogène à été traitée d'abord par [7] et ensuite par [13]. On reporte ici la remarque 3.3 de [13] qui suit du théorème 3.2.

Proposition 2.4. *Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$\partial_k E_n(k) = 2(\varphi_{n,k}, (k - A)\varphi_{n,k}) > 0 .$$

PREUVE. Par le théorème de Helmann-Feynman on a

$$\partial_k E_n(k) = 2(\varphi_{n,k}, (k - A)\varphi_{n,k}) \tag{2.5}$$

d'autre part

$$(\varphi_{n,k}, [ip_x, H_0(k)]\varphi_{n,k}) = -2(\varphi_{n,k}, B(k - A)\varphi_{n,k}) = 0 . \tag{2.6}$$

Remarquons que, comme p_x est non borné, cette égalité doit être prouvée (voir [13] ou adapter la preuve similaire du chapitre 3 en utilisant le fait

que $\sup_{x \in \mathbb{R}} B(x) = B_+ < \infty$. Donc, en combinant (2.5) et (2.6), pour un $B_0 \in \mathbb{R}^*$

$$\partial_k E_n(k) = \frac{2}{B_0} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{(B(x) - B_0)(A(x) - k)}_{\Delta} |\varphi_{n,k}(x)|^2 dx$$

et comme pour tout $k \in \mathbb{R}$ il existe un (unique) $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $k = A(x_0)$, en posant $B_0 = B(x_0) > 0$ on a

$$\Delta = (B(x) - B(x_0))(A(x) - A(x_0)) > 0$$

l'inégalité suit alors de la monotonie de A et B . □

Remarque On voit que les branches spectrales sont monotones croissantes entre les valeurs des niveaux de Landau associés au champ B_- et ceux associés au champ B_+ , ce qui permet d'établir une correspondance biunivoque entre les branches spectrales et les niveaux de Landau asymptotiques.

2.4.2 Modèle avec mur

Par [12] on a le résultat suivant.

Proposition 2.5. *Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$\begin{aligned} \partial_k E_n(k) &= 2(\varphi_{n,k}, (k - Bx)\varphi_{n,k}) \\ &= \frac{2}{B}(\varphi_{n,k}, U'\varphi_{n,k}) > 0 . \end{aligned}$$

Remarque On voit que, aussi pour ce modèle, les branches spectrales sont monotones croissantes, cette fois-ci entre les valeurs des niveaux de Landau associés au champ B et $+\infty$, ce qui permet d'établir une correspondance biunivoque entre les branches spectrales et les niveaux de Landau asymptotiques en $k = -\infty$.

2.5 Spectre absolument continu des H_0

Théorème 2.2. *Le spectre des hamiltoniens (1.1) et (1.3) est absolument continu, et on a*

– pour le modèle avec B inhomogène

$$\sigma(H_0) = \sigma_{ac}(H_0) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [(2n + 1)B_-, (2n + 1)B_+] ,$$

– pour le modèle avec mur

$$\sigma(H_0) = \sigma_{ac}(H_0) = [B, +\infty) .$$

PREUVE. Ceci découle du fait que les fonctions E_n sont analytiques et que $\partial_k E_n(k) \not\equiv 0$, ainsi les fonctions E_n ne peuvent pas être des constantes; finalement par [17, thm. XIII.86] on conclut que le spectre est purement absolument continu. \square

Remarque Pour le modèle avec B inhomogène le spectre de H_0 a une “structure de bande”; ces dernières peuvent se recouvrir ou pas, ceci dépend du choix des valeurs B_{\pm} , et bien sur de la valeur de n . Si on choisit n assez grand on aura sûrement des chevauchements.

Chapitre 3

Modèle avec B inhomogène: effet des impuretés et stabilité du spectre continu

3.1 Introduction

Au chapitre 2 on a étudié le problème “non perturbé” $H_0\phi = E\phi$, et on a vu que les branches spectrales ont l’allure suivante

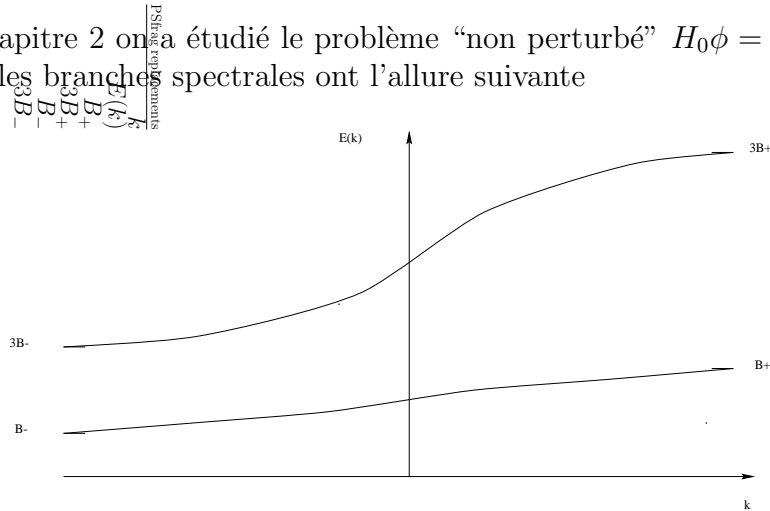


FIG. 3.1 – Les deux premières branches spectrales.

Remarquons que les pseudo-fonctions propres de H_0 s’écrivent comme suit

$$\phi_{n,k}(x,y) = \frac{e^{iky}}{\sqrt{2\pi}} \varphi_{n,k}(x) .$$

On considère maintenant l'hamiltonien (1.2) et on veut voir s'il existe des parties du spectre (absolument) continu de H_0 qui restent stables (c'est-à-dire "survivent") sous l'effet de l'adjonction d'un potentiel W (qui représente les impuretés étendues), si celui-ci est assez faible.

Le but est donc de montrer qu'il existe des bandes d'énergie $\Delta_{n,m}(B_{\pm},\delta)$ pour lesquelles, sous certaines conditions imposées à W , le spectre de H est purement continu dans $\Delta_{n,m}(B_{\pm},\delta)$.

On commence par établir les conditions pour l'absence du spectre ponctuel dans $\Delta_{n,m}(B_{\pm},\delta)$, ensuite on détermine les conditions pour avoir du spectre dans cet intervalle, ce qui assure que la partie du spectre dans $\Delta_{n,m}(B_{\pm},\delta)$ est continu.

3.2 Absence de spectre ponctuel

On commence par définir les intervalles $\Delta_{n,m}(B_{\pm},\delta)$. On classifie les asymptotes en $k = \pm\infty$ par ordre croissant (les lignes traitillées dans la figure ci-dessous, on identifie les valeurs s'ils sont égaux).

Ensuite on pose (voir aussi la figure 3.2)

$$\Delta_{n,m}(B_{\alpha},B_{\gamma},\delta) = (\beta_{n,m;\alpha,\gamma} - \delta, \beta_{n,m;\alpha,\gamma} + \delta)$$

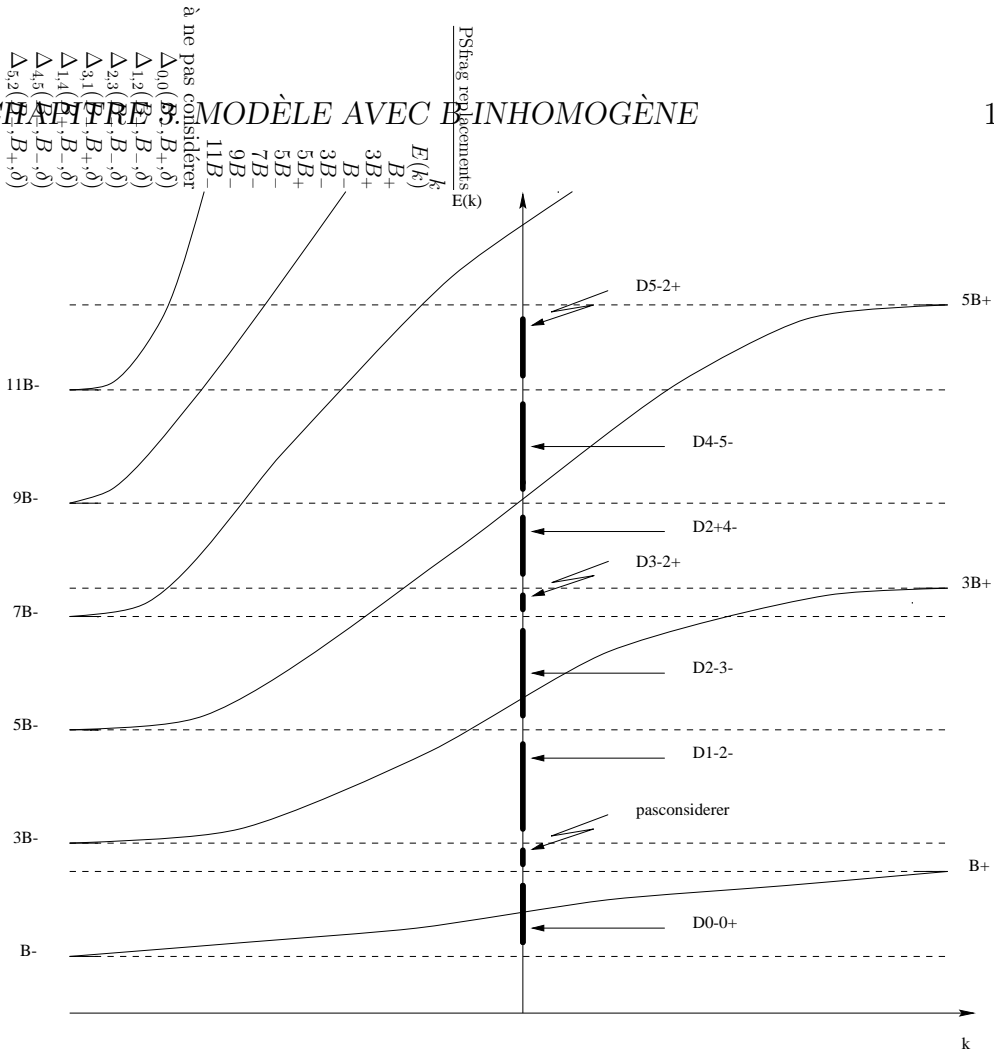


FIG. 3.2 – Définition des intervalles $\Delta_{n,m}(B_{\pm}, \delta)$.

avec:

- $\beta_{n,m;\alpha,\gamma} = \frac{(2n+1)B_{\alpha} + (2m+1)B_{\gamma}}{2}$,
- δ choisi tel que pour tout $E \in \Delta_{n,m}(B_{\alpha}, B_{\gamma}, \delta)$ et $p \in \mathbb{N}$

$$\text{dist}(E, (2p+1)B_{\pm}) > 0,$$

- les indices $n, m \in \mathbb{N}$ et $\alpha, \gamma \in \{+, -\}$ choisis de telle sorte que les valeurs $(2n+1)B_{\alpha}$ et $(2m+1)B_{\gamma}$ se suivent dans la classification des asymptotes (on a $(2n+1)B_{\alpha} < (2m+1)B_{\gamma}$).

En plus si pour tout E dans un de ces intervalles on a aucun croisement entre E et les branches spectrales, l'intervalle n'est pas considéré (voir la figure 3.2).

Dans la suite on note $\Delta_{n,m}(B_{\pm}, \delta)$ un quelconque de ces intervalles définis ci-dessus.

Théorème 3.1. *Si $W_0 < \mathcal{B}(\delta)$, avec $\mathcal{B}(\delta)$ la borne supérieure de W_0 , solution de l'équation (3.20), alors*

$$\sigma_{pp}(H) \cap \Delta_{n,m}(B_{\pm}, \delta) = \emptyset .$$

PREUVE. Pour établir la non existence du spectre ponctuel dans $\Delta_{n,m}(B_{\pm}, \delta)$ on procède en deux étapes et on aura besoin de quelques lemmes que l'on va introduire pas à pas.

La stratégie de la preuve est de supposer que pour $E \in \Delta_{n,m}(B_{\pm}, \delta)$ il existe $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tel que $H\psi = E\psi$, et de montrer ensuite que ceci est impossible si W_0 est assez petit.

Étape 1

Supposons $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$, avec $\|\psi\| = 1$ tel que $H\psi = E\psi$, alors on a

$$\|(H_0 - E)\psi\|^2 = \|W\psi\|^2 \leq W_0^2 \|\psi\|^2 = W_0^2 . \quad (3.1)$$

Développons ψ sur la pseudo-base $\{\phi_{n,k}\}_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{R}}$ des fonctions propres de H_0

$$\psi(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_i(k) \phi_{i,k}(x, y) dk , \quad (3.2)$$

on a clairement

$$\|\psi\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |\psi_i(k)|^2 dk = 1 . \quad (3.3)$$

À l'aide de (3.2), la relation (3.1) s'écrit

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |\psi_i(k)|^2 (E_i(k) - E)^2 dk \leq W_0^2$$

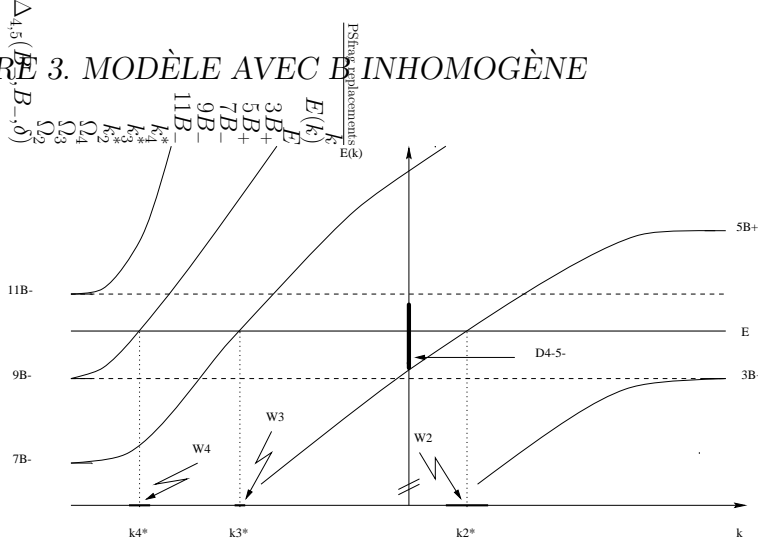
et vu la positivité des termes de la série on a

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_i(k)|^2 (E_i(k) - E)^2 dk \leq W_0^2 \quad (3.4)$$

$$\sum_{i=\ell}^m \int_{\mathbb{R}} |\psi_i(k)|^2 (E_i(k) - E)^2 dk \leq W_0^2 . \quad (3.5)$$

pour tout $i, \ell < m \in \mathbb{N}$.

Si pour $\alpha_i > 0$ on pose $\Omega_i = \mathbb{B}(k_i^*, \alpha_i)$ (la boule ouverte centrée au point k_i^* solution de $E_i(k) = E$), comme sur la figure ci-dessous,



øFIG. 3.3 – Définition des intervalles Ω_i . FIG. 3.3 – Définition des intervalles Ω_i .

alors on peut écrire (en posant $\Omega_i^c = \mathbb{R} \setminus \Omega_i$)

$$\begin{aligned} W_0^2 &\geq \int_{\mathbb{R}} |\psi_i(k)|^2 (E_i(k) - E)^2 dk \geq \int_{\Omega_i^c} |\psi_i(k)|^2 (E_i(k) - E)^2 dk \\ &\geq \inf_{k \in \Omega_i^c} (E_i(k) - E)^2 \int_{\Omega_i^c} |\psi_i(k)|^2 dk \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\Omega_i^c} |\psi_i(k)|^2 dk \leq \frac{W_0^2}{\inf_{k \in \Omega_i^c} (E_i(k) - E)^2}, \quad (3.6)$$

et comme Ω_i^c est fermé on a $\inf_{k \in \Omega_i^c} (E_i(k) - E)^2 > 0$.

Prenons $E \in \Delta_{n,m}(B_{\pm}, \delta)$ et supposons qu'il y a N croisements de E avec les branches spectrales $\{E_{\ell}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ (voir la figure 3.3). Soit N_{\uparrow} le plus grand indice des branches croisées et N_{\downarrow} le plus petit indice (on a $N = N_{\uparrow} - N_{\downarrow} + 1$). Alors par la monotonie des branches spectrales et le choix de E , on a

$$\begin{aligned} |E_{\ell}(k) - E| &\geq |E_{\ell}(k) - \beta - \delta| \geq |E_{\ell}(k) - \beta| - \delta \geq B^{\uparrow} - \delta > 0, \quad \ell > N_{\uparrow} \\ |E_{\ell}(k) - E| &\geq |\beta - \delta - E_{\ell}(k)| \geq |E_{\ell}(k) - \beta| - \delta \geq B^{\downarrow} - \delta > 0, \quad \ell < N_{\downarrow} \end{aligned}$$

où on a posé β égal au centre de l'intervalle $\Delta_{n,m}(B_{\pm}, \delta)$, et B^{\uparrow} la distance minimale entre β et la branche $E_{N_{\uparrow}+1}$, de même B^{\downarrow} est la distance minimale entre β et la branche $E_{N_{\downarrow}-1}$. Par (3.5) on a

$$W_0^2 \geq \sum_{i=N_{\uparrow}+1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |\psi_i(k)|^2 (B^{\uparrow} - \delta)^2 dk$$

et ainsi

$$\underbrace{\sum_{i=N_{\uparrow}+1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |\psi_i(k)|^2 dk}_{\doteq \|\psi_{\perp}^{\uparrow}\|^2} \leq \frac{W_0^2}{(B^{\uparrow} - \delta)^2}, \quad (3.7)$$

de même

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{N_{\downarrow}-1} \int_{\mathbb{R}} |\psi_i(k)|^2 dk}_{\doteq \|\psi_{\perp}^{\downarrow}\|^2} \leq \frac{W_0^2}{(B^{\downarrow} - \delta)^2}. \quad (3.8)$$

Par (3.3), (3.7) et (3.8) on a

$$1 \geq \sum_{i=N_{\downarrow}}^{N_{\uparrow}} \int_{\mathbb{R}} |\psi_i(k)|^2 dk \geq 1 - \left(\frac{W_0^2}{(B^{\uparrow} - \delta)^2} + \frac{W_0^2}{(B^{\downarrow} - \delta)^2} \right). \quad (3.9)$$

Voici deux petits lemmes utiles pour la suite.

Lemme 3.1 (Théorème de la moyenne). Soient $a < b$, $g \in C^1([a,b])$ avec $g(x) \geq 0$ et $g'(x) \geq 0 \forall x \in [a,b]$; $f \in L^1([a,b])$ avec $f(x) \geq 0 \forall x \in [a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot g(c)$$

avec $a \leq c \leq b$.

Lemme 3.2. Soit $J \subset \mathbb{N}$ un ensemble fini. Pour tout $i \in J$ soient $\varepsilon > 0$, $f_{i,\varepsilon} \in L^1(\mathbb{R})$, avec $f_{i,\varepsilon} \geq 0$ sur \mathbb{R} ; $g_i \in C^\infty(\mathbb{R})$, avec $g_i \geq 0$ sur \mathbb{R} , et tel qu'il existe un unique x_i^* pour lequel $g_i(x_i^*) = 0$. Alors, pour tout $g_i, f_{i,\varepsilon}$ tel que

$$1 \geq \sum_{i \in J} \int_{\mathbb{R}} f_{i,\varepsilon}(x) dx \geq 1 - \gamma \varepsilon \quad (3.10)$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_{i,\varepsilon}(x) g_i(x) dx \leq \varepsilon \quad (3.11)$$

avec $\gamma > 0$, on a

$$1 \geq \sum_{i \in J} \int_{\Lambda_i} f_{i,\varepsilon}(x) dx \geq 1 - \left(\gamma + \sum_{i \in J} \sup_{x \in \Lambda_i^c} (g_i(x))^{-1} \right) \varepsilon$$

avec $\Lambda_i = (x_i^* - \tau_i, x_i^* + \tau_i)$ ($\tau_i > 0$) et $\Lambda_i^c = \mathbb{R} \setminus \Lambda_i$ ($i \in J$).

PREUVE. Par (3.11) on a

$$\int_{\Lambda_i} f_{i,\varepsilon}(x)g_i(x) dx + \int_{\Lambda_i^c} f_{i,\varepsilon}(x)g_i(x) dx \leq \varepsilon$$

d'où

$$\int_{\Lambda_i^c} f_{i,\varepsilon}(x)g_i(x) dx \leq \varepsilon \quad (3.12)$$

vu la positivité de $f_{i,\varepsilon}$ et g_i . La même décomposition sur (3.10) donne

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sum_{i \in J} \int_{\Lambda_i} f_{i,\varepsilon}(x) dx &\geq 1 - \gamma\varepsilon - \sum_{i \in J} \int_{\Lambda_i^c} f_{i,\varepsilon}(x) \frac{g_i(x)}{g_i(x)} dx \\ &&\geq 1 - \gamma\varepsilon - \sum_{i \in J} \sup_{x \in \Lambda_i^c} \frac{1}{g_i(x)} \int_{\Lambda_i^c} f_{i,\varepsilon}(x)g_i(x) dx \\ &&\stackrel{(3.12)}{\geq} 1 - \gamma\varepsilon - \sum_{i \in J} \sup_{x \in \Lambda_i^c} \frac{1}{g_i(x)} \varepsilon . \end{aligned}$$

□

Le lemme 3.2 appliqué aux équations (3.4) et (3.9) (avec $\Lambda_i = \Omega_i$) donne

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sum_{i=N_\downarrow}^{N_\uparrow} \int_{\Omega_i} |\psi_i(k)|^2 dk \\ &\geq 1 - W_0^2 \left[\frac{1}{(B^\uparrow - \delta)^2} + \frac{1}{(B^\downarrow - \delta)^2} + \sum_{i=N_\downarrow}^{N_\uparrow} \sup_{k \in \Omega_i^c} (E_i(k) - E)^{-2} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

et comme Ω_i^c est fermé $\sup_{k \in \Omega_i^c} (E_i(k) - E)^{-2} < \infty$.

Étape 2

Si $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ satisfait $H\psi = E\psi$, alors formellement pour tout opérateur Y on a

$$(\psi, [iY, H]\psi) = 0 . \quad (3.14)$$

On prend $Y = -y$, alors on a

$$[iY, H] = 2(p_y - A) \doteq C . \quad (3.15)$$

Le but est de montrer que, pour certains choix de W_0 , (3.14) est mise en défaut, c'est-à-dire que pour E il n'existe pas de fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ qui satisfait $H\psi = E\psi$.

Le lemme suivant assure que $(\psi, [iY, H]\psi) = 0$.

Lemme 3.3. *Si ψ est une fonction propre normalisée de H , alors*

$$(\psi, 2(p_y - A)\psi) = 0 .$$

PREUVE. Le résultat suit formellement de (3.15), mais comme Y est non borné il faut le prouver. On utilise la même technique que [12].

Soit $\psi \in \mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_0)$; premièrement on remarque que

$$\begin{aligned} \|2(p_y - A)\psi\|^2 &= 4(\psi, (p_y - A)^2\psi) \\ &\leq 4(\psi, [p_x^2 + (p_y - A)^2]\psi) \\ &\leq 4\|H_0\psi\| < \infty . \end{aligned}$$

Pour $\lambda > 0$ posons $R_\lambda \doteq \lambda(iY + \lambda)^{-1}$, on a $\|R_\lambda\| = 1$. Pour la suite il sera utile de montrer que les deux inégalités suivantes

$$\|2(p_y - A)R_\lambda\psi\| < \infty \quad \text{et} \quad \|HR_\lambda\psi\| < \infty$$

sont vérifiées uniformément par rapport à λ . Or, comme W est borné, il s'agit de montrer que $\|H_0R_\lambda\psi\| < \infty$; en effet on voit que si la deuxième inégalité est satisfaite alors il en est de même pour la première, car

$$\|2(p_y - A)R_\lambda\psi\| \leq 2\|H_0R_\lambda\psi\|^{1/2} .$$

On remarque que pour $\lambda > 0$ on peut écrire

$$R_\lambda = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} e^{-iYt} dt$$

et donc

$$\|H_0R_\lambda\psi\| \leq \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \|H_0e^{-iYt}\psi\| dt ;$$

voyons que $\|H_0e^{-iYt}\psi\| = \|e^{iYt}H_0e^{-iYt}\psi\| \leq \mathcal{P}(t)$ (un polynôme en t), alors pour tout $\lambda > 0$ on aura ($k \in \mathbb{N}$)

$$\lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^k dt = \frac{1}{\lambda^k} \int_0^{+\infty} e^{-s} s^k ds < \infty .$$

Or y est le générateur des translations selon p_y (dans l'“espace des impulsions”), donc

$$e^{iYt}H_0e^{-iYt} = p_x^2 + ([p_y - t] - A)^2$$

et on peut écrire ($t > 0$)

$$\begin{aligned}
 \|H_0 e^{-iYt} \psi\| &= \|[p_x^2 + ((p_y - A) - t)^2] \psi\| \\
 &= \|[p_x^2 + (p_y - A)^2 + t^2 - 2t(p_y - A)] \psi\| \\
 &\leq \|H_0 \psi\| + 2t\|(p_y - A)\psi\| + t^2 \\
 &\leq \|H_0 \psi\| + 2t\|H_0 \psi\|^{1/2} + t^2 .
 \end{aligned}$$

Retournons au problème de départ. Les inégalités que l'on vient de montrer permettent d'affirmer que la norme du vecteur suivant est finie

$$HYR_\lambda \psi = i\lambda H(R_\lambda - I)\psi \quad (3.16)$$

donc que les égalités suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned}
 C\psi &= -(R_\lambda - I)C(R_\lambda - I)\psi - (R_\lambda - I)C\psi \\
 &\quad - C(R_\lambda - I)\psi + R_\lambda C R_\lambda \psi
 \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
 R_\lambda C R_\lambda \psi &= R_\lambda (iYH - iHY) R_\lambda \psi \\
 &= i(R_\lambda Y H R_\lambda \psi - R_\lambda H Y R_\lambda \psi) \\
 &\stackrel{(3.16)}{=} \lambda (H R_\lambda \psi - R_\lambda H \psi) .
 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Par (3.18) on a $(\psi, R_\lambda C R_\lambda \psi) = 0$, car $H\psi = E\psi$ et R_λ est borné. Voyons qu'en laissant $\lambda \rightarrow +\infty$ on a $(\psi, C\psi) = 0$ ce qui est le résultat cherché. Par (3.17) on a

$$\begin{aligned}
 |(\psi, C\psi)| &\leq |(\psi, (R_\lambda - I)C(R_\lambda - I)\psi)| + |(\psi, (R_\lambda - I)C\psi)| \\
 &\quad + |(\psi, C(R_\lambda - I)\psi)| \\
 &\leq \|(R_\lambda - I)\psi\| (\|C\psi\| + \|C R_\lambda \psi\|) + 2\|(R_\lambda - I)\psi\| \|C\psi\| \\
 &= \|(R_\lambda - I)\psi\| \underbrace{(\|C R_\lambda \psi\| + 3\|C\psi\|)}_{< \infty}
 \end{aligned}$$

et, en utilisant l'égalité $R_\lambda - I = -\lambda^{-1}iYR_\lambda$, on conclut en remarquant que $s - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (R_\lambda - I) = 0$. \square

Pour mettre en défaut (3.14) il suffit de voir qu'il existe $W_0 > 0$ tel que

$$(\psi, C\psi) \neq 0 . \quad (3.19)$$

Posons $J = [N_\downarrow, N_\uparrow]$ et écrivons

$$\psi = \underbrace{\sum_{i=N_\uparrow+1}^{\infty} \psi_i}_{\psi_\perp^\uparrow} + \underbrace{\sum_{i=0}^{N_\downarrow-1} \psi_i}_{\psi_\perp^\downarrow} + \sum_{i \in J} \psi_i ,$$

alors

$$\begin{aligned}
 (\psi, C\psi) &= \sum_{i \in J} (\psi_i, C\psi_i) + (\psi_\perp^\uparrow, C\psi_\perp^\uparrow) + (\psi_\perp^\downarrow, C\psi_\perp^\downarrow) \\
 &+ \left[\sum_{i \in J} (\psi_\perp^\uparrow, C\psi_i) + \sum_{i \in J} (\psi_\perp^\downarrow, C\psi_i) + c.c. \right] \\
 &+ \sum_{\substack{i, j \in J \\ i \neq j}} (\psi_i, C\psi_j) + (\psi_\perp^\uparrow, C\psi_\perp^\downarrow) + (\psi_\perp^\downarrow, C\psi_\perp^\uparrow).
 \end{aligned}$$

On peut minorer le terme $(\psi, C\psi)$ par l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
 (\psi, C\psi) &\geq \sum_{i \in J} \underbrace{(\psi_i, C\psi_i)}_{(1)} - \underbrace{|(\psi_\perp^\uparrow, C\psi_\perp^\uparrow)|}_{(2)} - \underbrace{|(\psi_\perp^\downarrow, C\psi_\perp^\downarrow)|}_{(3)} \\
 &- 2 \sum_{i \in J} \underbrace{|(\psi_\perp^\uparrow, C\psi_i)|}_{(4)} - 2 \sum_{i \in J} \underbrace{|(\psi_\perp^\downarrow, C\psi_i)|}_{(5)} \\
 &- 2 \sum_{\substack{i, j \in J \\ i < j}} \underbrace{|(\psi_i, C\psi_j)|}_{(6)} - 2 \underbrace{|(\psi_\perp^\uparrow, C\psi_\perp^\downarrow)|}_{(7)}
 \end{aligned}$$

analysons ces sept termes.

(1):

$$\begin{aligned}
 (1) &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \left\{ \int_{\mathbb{R}} dk' \psi_i^*(k') \frac{e^{-ik'y}}{\sqrt{2\pi}} \varphi_{i,k'}^*(x) \int_{\mathbb{R}} dk \psi_i(k) C \frac{e^{iky}}{\sqrt{2\pi}} \varphi_{i,k}(x) \right\} \\
 &= \int_{\mathbb{R}} dk |\psi_i(k)|^2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx 2(k - A(x)) |\varphi_{i,k}(x)|^2}_{=\partial_k E_i(k)} \\
 &\geq \partial_k E_i(k_{c_i}) \int_{\Omega_i} |\psi_i(k)|^2 dk
 \end{aligned}$$

où la deuxième égalité suit de $p_y e^{iky} = k e^{iky}$; tandis que dans la dernière égalité k_{c_i} joue le même rôle que c dans le lemme 3.1. Remarquons que, par les propositions 2.2 et 2.4, on a

$$\partial_k E_i(k) > 0 \quad \forall k \neq \pm\infty.$$

(2)-(3):

$$\begin{aligned}
 (2) &= |(\psi_\perp^\uparrow, C\psi_\perp^\uparrow)| \leq \|\psi_\perp^\uparrow\| \|C\psi_\perp^\uparrow\| \\
 &\stackrel{(3.7)}{\leq} \frac{W_0}{B^\dagger - \delta} \|C\psi_\perp^\uparrow\|
 \end{aligned}$$

et pour $\|C\psi_\perp^\uparrow\|^2$ on a

$$\begin{aligned}
 \|C\psi_\perp^\uparrow\|^2 &= 4 \left(\psi_\perp^\uparrow, (p_y - A)^2 \psi_\perp^\uparrow \right) \\
 &\leq 4 \left(\psi_\perp^\uparrow, [p_x^2 + (p_y - A)^2] \psi_\perp^\uparrow \right) + 4 \left(\psi_\perp^\downarrow, [p_x^2 + 4(p_y - A)^2] \psi_\perp^\downarrow \right) \\
 &+ 4 \sum_{i \in J} \left(\psi_i, [p_x^2 + (p_y - A)^2] \psi_i \right) \\
 &= \underbrace{4(\psi, H_0 \psi)}_{=4(\psi, H \psi)} + 4(\psi, W \psi) - 4(\psi, W \psi) \\
 &\leq 4E + 4|(\psi, W \psi)| \leq 4(E + W_0)
 \end{aligned}$$

la première inégalité suit du fait que $(\psi_i, H_0 \psi_j) = 0$ pour tout $i, j \in \mathbb{N}$.

Donc

$$(2) \leq 2 \frac{W_0}{B^\uparrow - \delta} \sqrt{E + W_0}.$$

De même, en échangeant \uparrow avec \downarrow , on trouve

$$(3) \leq 2 \frac{W_0}{B^\downarrow - \delta} \sqrt{E + W_0}.$$

(4)-(5)-(7): Un raisonnement analogue au précédent montre que l'on a

$$(4), (7) \leq 2 \frac{W_0}{B^\uparrow - \delta} \sqrt{E + W_0},$$

$$(5), (7) \leq 2 \frac{W_0}{B^\downarrow - \delta} \sqrt{E + W_0}.$$

(6):

$$|(\psi_i, C\psi_j)| \leq 2 \int_{\mathbb{R}} dk |\psi_i(k)| |\psi_j(k)| \overbrace{\int_{\mathbb{R}} dx |k - A(x)| |\varphi_{i,k}(x)| |\varphi_{j,k}(x)|}^{g(k)}$$

pour le terme intégré sur x on peut écrire (en posant $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}, dx)$)

$$\begin{aligned}
 g(k) = \|(k - A)\varphi_{i,k}\varphi_{j,k}\|_{L^1(\mathbb{R}, dx)} &\leq \|(k - A)\varphi_{i,k}\|_{\mathcal{K}} \|\varphi_{j,k}\|_{\mathcal{K}} \\
 &= (\varphi_{i,k}, (k - A)^2 \varphi_{i,k})_{\mathcal{K}}^{1/2} \\
 &\leq (\varphi_{i,k}, [p_x^2 + (k - A)^2] \varphi_{i,k})_{\mathcal{K}}^{1/2} \\
 &= \sqrt{E_i(k)};
 \end{aligned}$$

donc on a

$$\begin{aligned}
 |(\psi_i, C\psi_j)| &\leq 2 \sup_{k \in \mathbb{R}} \sqrt{E_i(k)} \int_{\mathbb{R}} \overbrace{|\psi_i(k)| |\psi_j(k)|}^{f(k)} dk \\
 &= 2\sqrt{(2i+1)B_+} \left\{ \int_{\Omega_i} f(k) dk + \int_{\Omega_j} f(k) dk + \int_{(\Omega_i \cup \Omega_j)^c} f(k) dk \right\}
 \end{aligned}$$

et, par exemple, pour le premier terme on peut écrire

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_i} f(k) dk &\leq \left(\int_{\Omega_i} |\psi_j(k)|^2 dk \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_i} |\psi_i(k)|^2 dk \right)^{1/2} \\
 &\leq \left(\int_{\Omega_j^c} |\psi_j(k)|^2 dk \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |\psi_i(k)|^2 dk \right)^{1/2} \\
 &\stackrel{(3.6)}{\leq} \frac{W_0}{\sqrt{\inf_{k \in \Omega_j^c} (E_j(k) - E)^2}}.
 \end{aligned}$$

car on peut choisir $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ ($i \neq j$). Un raisonnement analogue sur les deux autres termes donne finalement

$$(6) \leq 2\sqrt{(2i+1)B_+} W_0 \left(\frac{1}{\sqrt{\inf_{k \in \Omega_j^c} (E_j(k) - E)^2}} + \frac{2}{\sqrt{\inf_{k \in \Omega_i^c} (E_i(k) - E)^2}} \right).$$

Enfin on peut écrire

$$\begin{aligned}
 (\psi, C\psi) &\geq \sum_{i \in J} \partial_k E_i(k_{c_i}) \int_{\Omega_i} |\psi_i(k)|^2 dk \\
 &\quad - W_0 \left\{ 4\sqrt{E + W_0} \left(\frac{N+1}{B^\uparrow - \delta} + \frac{N+1}{B^\downarrow - \delta} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\sum_{\substack{i, j \in J \\ i < j}} 4\sqrt{(2i+1)B_+} \left(\frac{1}{\sqrt{\inf_{k \in \Omega_j^c} (E_j(k) - E)^2}} + \frac{2}{\sqrt{\inf_{k \in \Omega_i^c} (E_i(k) - E)^2}} \right)}_{\doteq \Theta(E)} \right\};
 \end{aligned}$$

et en utilisant (3.13) le premier terme peut être minoré par

$$\underbrace{\min_{i \in J} \partial_k E_i(k_{c_i})}_{\mathcal{I}} \left\{ 1 - W_0^2 \left(\frac{1}{(B^\uparrow - \delta)^2} + \frac{1}{(B^\downarrow - \delta)^2} + \sum_{i \in J} \sup_{k \in \Omega_i^c} (E_i(k) - E)^{-2} \right) \right\}.$$

Il faut maintenant voir que \mathcal{I} est strictement positif pour tout choix de W_0 . Ceci se voit en remarquant que, pour tout $i \in J$, $k_{c_i} \in \Omega_i$ et que pour avoir $\partial_k E_i(k_{c_i}) > 0$ il suffit que $\{\pm\infty\}$ ne soient pas contenu dans les Ω_i , or ceci est toujours réalisable.

On voit donc que la condition (3.19) est satisfaite si on choisit $W_0 > 0$ assez petit.

L'équation suivante donne la borne supérieure $\mathcal{B}(\delta)$ pour W_0 :

$$\begin{aligned} & \mathcal{I} \left\{ 1 - W_0^2 \left(\frac{1}{(B^\uparrow - \delta)^2} + \frac{1}{(B^\downarrow - \delta)^2} + \sum_{i \in J} \sup_{k \in \Omega_i^c} (E_i(k) - E)^{-2} \right) \right\} \\ & - W_0 \left\{ 4\sqrt{E + W_0} \left(\frac{N+1}{B^\uparrow - \delta} + \frac{N+1}{B^\downarrow - \delta} \right) + \Theta(E) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ceci conclut la preuve du théorème 3.1. □

Remarque Le choix optimal des Ω_i , donc des α_i (car k_i^* est fixé par la valeur de E) n'est pas facile. En tout cas il faut qu'ils soient disjoints (voir l'estimation du terme $(\psi_i, C\psi_j)$ dans la preuve du théorème 3.1) et, pour garantir la positivité stricte du terme \mathcal{I} , il faudra choisir les Ω_i disjoints de $\{\pm\infty\}$ (cette condition est suffisante mais pas forcément nécessaire).

Pour le reste il s'agit de caractériser le comportement, des termes qui dépendent de Ω_i , par rapport à α_i . D'une part, lorsque α_i augmente les termes $\sup_{k \in \Omega_i^c} (E_i(k) - E)^{-2}$ et $\frac{1}{\sqrt{\inf_{k \in \Omega_i^c} (E_i(k) - E)^2}}$ décroissent, ce qui est favorable.

Mais, d'autre part, comme le comportement du terme $\min_{i \in J} \partial_k E_i(k_{c_i})$ par rapport à α_i est difficile à caractériser (car il dépend des coefficients de Fourier ψ_i), il n'est pas facile de donner la valeur de α_i qui est optimale.

3.3 Existence du spectre

Il faut encore voir si $\Delta_{n,m}(B_\pm, \delta)$ est contenu dans le spectre. Pour cela on a le théorème suivant.

Théorème 3.2. *Sous l'hypothèse du théorème 3.1 on a*

$$\Delta_{n,m}(B_\pm, \delta) \subset \sigma(H).$$

La preuve est une simple adaptation de celle utilisée dans [12]: on suppose $E \in \rho(H)$ et on montre que, sous certaines conditions, ceci est impossible.

On introduit la fonction

$$g_R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

et on pose $W_R \doteq -Wg_R$, on "construit" alors l'hamiltonien auxiliaire suivant

$$H_R = H + W_R = H_0 + W(1 - g_R)$$

et on exploite le fait que $e^{-tH_R} - e^{-tH}$ est un opérateur compact. Ceci permet de conclure que H_R et H ont le même spectre essentiel.

Voici trois lemmes sur lesquels se base la preuve du théorème 3.2.

Lemme 3.4. *Soit H l'hamiltonien (1.1) et H_R comme ci-dessus, alors $e^{-tH_R} - e^{-tH}$ est trace class, donc aussi compact et*

$$\sigma_{ess}(H_R) = \sigma_{ess}(H) .$$

PREUVE. On considère, plutôt que les opérateurs H et H_R , les opérateurs e^{-tH_R} et e^{-tH} ($t \geq 0$).

Dans la représentation de Feynman-Kac-Itô on a les estimations suivantes sur les noyaux de ces opérateurs [19, §15] (on pose $(x,y) = r$ et $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$):

$$\begin{aligned} |(r_1|e^{-sH_R}|r_2)| &\leq e^{sW_0} (r_1|e^{s\Delta}|r_2) \\ |(r_1|e^{-sH}|r_2)| &\leq e^{sW_0} (r_1|e^{s\Delta}|r_2) \end{aligned}$$

pour $0 \leq s \leq t$, avec le noyau du laplacien donné par

$$(r_1|e^{s\Delta}|r_2) = \frac{1}{4\pi s} e^{-\frac{|r_1-r_2|^2}{4s}} .$$

Soit $\|\cdot\|_2$ la norme de Hilbert-Schmidt et $\|\cdot\|_1$ la norme *trace class*. Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, considérons l'opérateur intégral de noyau

$$(fe^{-s\tilde{H}})(r_1, r_2) = f(r_1)(r_1|e^{-s\tilde{H}}|r_2)$$

avec \tilde{H} égal soit à H , soit à H_R ; on a

$$\begin{aligned} \|fe^{-s\tilde{H}}\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} dr_1 \int_{\mathbb{R}^2} dr_2 |f(r_1)|^2 |(r_1|e^{-s\tilde{H}}|r_2)|^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} dr_1 |f(r_1)|^2 \int_{\mathbb{R}^2} dr_2 e^{2sW_0} \frac{1}{(4\pi s)^2} e^{-\frac{|r_1-r_2|^2}{2s}} \\ &= e^{2sW_0} \|f\|_{L^2}^2 \frac{1}{8\pi s} . \end{aligned}$$

En utilisant la série de Dyson on peut écrire

$$e^{-tH_R} = e^{-tH} + \int_0^t e^{-(t-s)H} W_R e^{-sH_R} ds$$

et donc on peut minorer la norme *trace class* par

$$\|e^{-tH_R} - e^{-tH}\|_1 \leq \int_0^t \|e^{-(t-s)H} W_R e^{-sH_R}\|_1 ds .$$

Comme pour tout opérateur A *trace class* on peut écrire $A = ST$ avec S, T deux opérateurs de Hilbert-Schmidt, en utilisant l'inégalité $\|A\|_1 \leq \|S\|_2 \|T\|_2$ on a

$$\|e^{-(t-s)H} W_R e^{-sH_R}\|_1 \leq \left\| e^{-(t-s)H} \sqrt{|W_R|} \right\|_2 \left\| \sqrt{|W_R|} e^{-sH_R} \right\|_2$$

d'où

$$\begin{aligned} \|e^{-tH_R} - e^{-tH}\|_1 &\leq \int_0^t \left\| e^{-(t-s)H} \sqrt{|W_R|} \right\|_2 \left\| \sqrt{|W_R|} e^{-sH_R} \right\|_2 ds \\ &\leq \int_0^t \frac{e^{2sW_0} \|W_R\|_{L^1}}{8\pi\sqrt{(t-s)s}} ds < \infty \end{aligned}$$

car W_R est borné et à support compact; ce qui montre que $e^{-tH_R} - e^{-tH}$ est *trace class* donc compact [15, thm. VI.21]. Par le théorème de Weyl [17, thm. XIII.14] on conclut que $\sigma_{ess}(H_R) = \sigma_{ess}(H)$. \square

Lemme 3.5. *Si $W_0 < \mathcal{B}(\delta)$, alors pour $R > 0$ (le cas $R = 0$ donne $H = H_R$) on a*

$$\sigma_{pp}(H_R) \cap \Delta_{n,m}(B_{\pm}, \delta) = \emptyset .$$

PREUVE. Posons

$$W_0(R) = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |W_R(x,y)| = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |W(x,y) (1 - g_R(x,y))|$$

il est clair que $W_0(R) \leq W_0$, et comme par hypothèse $W_0 < \mathcal{B}(\delta)$ on a $W_0(R) < \mathcal{B}(\delta)$; par le théorème 3.1 H_R n'aura pas de spectre ponctuel dans $\Delta_{n,m}(B_{\pm}, \delta)$. \square

Lemme 3.6. *Pour $E \in \Delta_{n,m}(B_{\pm}, \delta)$ et $\varepsilon > 0$ on peut trouver $R_0(\varepsilon, E)$ tel que pour tout $R > R_0(\varepsilon, E)$*

$$\text{dist}(E, \sigma(H_R)) \leq \varepsilon .$$

PREUVE. Comme par hypothèse $E \in \sigma(H_0)$, il existe un $\psi_0 \in \mathcal{H}$ tel que

$$\|(H_0 - E)\psi_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et on a donc

$$\begin{aligned} \|(H_R - E)\psi_0\| &= \|(H_0 + W(1 - g_R) - E)\psi_0\| \\ &\leq \|(H_0 - E)\psi_0\| + \|W(1 - g_R)\psi_0\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + W_0\|(1 - g_R)\psi_0\| . \end{aligned}$$

Comme on peut prendre (normalisation) $\|\psi_0\| = 1$, pour R très grand le deuxième terme devient petit, on peut ainsi trouver un $R_0(\varepsilon, E)$ tel que pour $R > R_0(\varepsilon, E)$

$$\|(1 - g_R)\psi_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2W_0}$$

ainsi

$$\|(H_R - E)\psi_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

On conclut en remarquant que $\|(H_R - E)\psi_0\| \geq \text{dist}(E, \sigma(H_R)) \|\psi_0\|$. \square

PREUVE DU THÉORÈME 3.2. Prenons $E \in \Delta_{n,m}(B_{\pm}, \delta)$ et supposons que $E \in \rho(H)$ (l'ensemble résolvant de H).

Comme $\rho(H)$ est ouvert, il existe $\tau > 0$ tel que la boule ouverte $\mathbb{B}(E, \tau) \subset \rho(H)$, donc $\text{dist}(E, \sigma(H)) \geq \tau$.

Or, dans $\mathbb{B}(E, \tau)$ H n'a pas de spectre, et en particulier n'a pas de spectre essentiel. Ainsi dans $\mathbb{B}(E, \tau)$, H_R ne peut avoir que du spectre discret ($\sigma_{ess}(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_{disc}(A)$); mais par le lemme 3.5 (pour $R > 0$) ceci est impossible, donc H_R n'a pas de spectre dans $\mathbb{B}(E, \tau)$ et ainsi

$$\text{dist}(E, \sigma(H_R)) \geq \tau \quad \text{si } R > 0 .$$

D'autre part, en prenant $\varepsilon = \frac{\tau}{2}$ dans le lemme 3.6, on a

$$\text{dist}(E, \sigma(H_R)) \leq \frac{\tau}{2} \quad \text{si } R > R_0\left(\frac{\tau}{2}, E\right)$$

et en prenant $R > R_0\left(\frac{\tau}{2}, E\right)$ on a une contradiction, donc $E \in \sigma(H)$ pour tout $E \in \Delta_{n,m}(B_{\pm}, \delta)$. \square

Conclusion et commentaires

On a donc montré que, pour un potentiel W assez petit il existe des intervalles entre les "niveaux de Landau" où le spectre de H est continu (on n'exclut pas l'existence de spectre singulier continu).

Remarquons que pour E finie on a un nombre fini de croisements entre E et les branches spectrales. Les sommes et les termes proportionnels au nombre de croisements (N) qui contribuent négativement dans l'équation (3.20) sont donc finis.

On remarque que la borne supérieure $\mathcal{B}(\delta)$ diminue lorsque le nombre de croisements augmente (on a une borne qui n'est pas uniforme), il n'est donc pas possible de traiter le cas d'un nombre infini de croisements entre E et les branches spectrales.

Remarque: Effet d'une impureté localisée

Le cas plus simple à traiter est celui d'une impureté localisée dans une région de l'espace; dans ce cas on a que W est à support compact et borné, donc intégrable, par le lemme 3.4 on conclut que $e^{-tH} - e^{-tH_0}$ est *trace class*. Par [8, chap. X, thm. 4.4] on a la stabilité du spectre absolument continu sous l'effet d'une impureté localisée:

$$\sigma_{ac}(H) = \sigma_{ac}(H_0) .$$

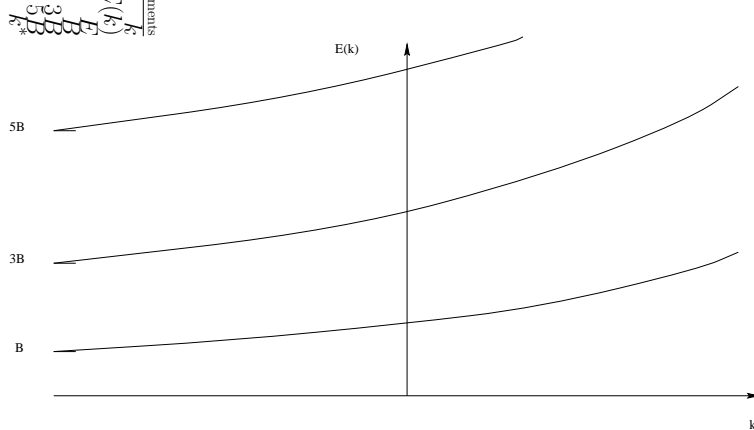
Chapitre 4

Modèle avec mur: effet des impuretés et stabilité du spectre continu

4.1 Introduction

L'étude de la stabilité de certaines parties du spectre continu sous l'effet d'impuretés étendues est très similaire au modèle précédent, certaines preuves seront donc "raccourcies".

L'étude du problème $H_0\phi = E\phi$ fait au chapitre 2 a permis de déterminer le comportement suivant des branches spectrales



øFIG. 4.1 – Les trois premières branches spectrales. FIG. 4.1 – Les trois premières branches spectrales.

Le but est de montrer qu'il existe des bandes d'énergie $\Delta_n(B, \delta)$ pour les-

quelles, sous certaines conditions imposées à W , le spectre de H dans $\Delta_n(B, \delta)$ est purement continu. On commence par établir les conditions pour l'absence du spectre ponctuel dans $\Delta_n(B, \delta)$, ensuite on détermine les conditions pour avoir du spectre dans cet intervalle.

4.2 Absence de spectre ponctuel

Théorème 4.1. *Si $W_0 < \mathcal{B}(\delta)$, avec $\mathcal{B}(\delta)$ la borne supérieure de W_0 , solution de l'équation (4.6), alors*

$$\sigma_{pp}(H) \cap \Delta_n(B, \delta) = \emptyset .$$

PREUVE. Pour établir la non existence du spectre ponctuel dans $\Delta_n(B, \delta)$ on procède en deux étapes.

Étape 1

Le début est identique au cas étudié au chapitre 3 (voir la preuve du théorème 3.1), on utilise les mêmes notations.

Posons alors $\Delta_n(B, \delta) = (2(n+1)B - \delta, 2(n+1)B + \delta)$ ($0 < \delta < B$). Prenons $E \in \Delta_n(B, \delta)$, par la monotonie des branches spectrales et le choix de E on a

$$|E_\ell(k) - E| \geq |(2(n+1) + 1)B - 2(n+1)B - \delta| \geq B - \delta, \quad \ell > n .$$

En suivant la même trace qu'au chapitre précédent on aboutit aux estimations suivantes

$$\int_{\Omega_i^c} |\psi_i(k)|^2 dk \leq \frac{W_0^2}{\inf_{k \in \Omega_i^c} (E_i(k) - E)^2}, \quad (4.1)$$

$$\underbrace{\sum_{i=n+1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |\psi_i(k)|^2 dk}_{\doteq \|\psi_{\perp}\|^2} \leq \frac{W_0^2}{(B - \delta)^2}, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sum_{i=0}^n \int_{\Omega_i} |\psi_i(k)|^2 dk \\ &\geq 1 - W_0^2 \left[\frac{1}{(B - \delta)^2} + \sum_{i=0}^n \sup_{k \in \Omega_i^c} (E_i(k) - E)^{-2} \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Étape 2

Si $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ satisfait $H\psi = E\psi$, alors formellement pour tout opérateur Y on a

$$(\psi, [iY, H]\psi) = 0 . \quad (4.4)$$

Posons $Y = -y$, alors le commutateur vaut

$$[iY, H] = 2(p_y - Bx) \doteq C .$$

Le lemme suivant assure que $(\psi, [iY, H]\psi) = 0$.

Lemme 4.1. *Si ψ est une fonction propre normalisée de H , alors*

$$(\psi, 2(p_y - Bx)\psi) = 0 .$$

PREUVE. Il suffit d'adapter la preuve du lemme 3.3 du chapitre précédent en utilisant le fait que le potentiel du mur U est un opérateur positif. \square

Le but est de montrer que, pour certains choix de W_0 , (4.4) est mis en défaut; pour ceci il suffit de voir que, pour certains W_0 on a

$$(\psi, C\psi) \neq 0 . \quad (4.5)$$

Écrivons $\psi = \sum_{i=0}^n \psi_i + \psi_\perp$, alors

$$\begin{aligned} (\psi, C\psi) &= \sum_{i=0}^n \underbrace{(\psi_i, C\psi_i)}_{(1)} + \left[\sum_{i=0}^n \underbrace{(\psi_\perp, C\psi_i)}_{(2)} + c.c. \right] \\ &+ \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} (\psi_i, C\psi_j) + \underbrace{(\psi_\perp, C\psi_\perp)}_{(4)} \end{aligned}$$

or, on peut minorer le terme $(\psi, C\psi)$ par l'inégalité

$$\begin{aligned} (\psi, C\psi) &\geq \sum_{i=0}^n \underbrace{(\psi_i, C\psi_i)}_{(1)} - 2 \sum_{i=0}^n \underbrace{|(\psi_\perp, C\psi_i)|}_{(2)} \\ &- 2 \sum_{\substack{0 \leq i < j \leq n}} \underbrace{|(\psi_i, C\psi_j)|}_{(3)} - \underbrace{|(\psi_\perp, C\psi_\perp)|}_{(4)} \end{aligned}$$

analysons ces quatre termes.

(1):

$$\begin{aligned}
(1) &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \left\{ C \int_{\mathbb{R}} dk' \int_{\mathbb{R}} dk \psi_i(k) \psi_i^*(k') \frac{e^{i(k-k')y}}{2\pi} \varphi_{i,k}(x) \varphi_{i,k'}^*(x) \right\} \\
&= \int_{\mathbb{R}} dk |\psi_i(k)|^2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx 2(k - Bx) |\varphi_{i,k}(x)|^2}_{=\partial_k E_i(k)} \\
&= \partial_k E_i(k_{c_i}) \int_{\mathbb{R}} |\psi_i(k)|^2 dk
\end{aligned}$$

où on a utilisé $p_y e^{iky} = k e^{iky}$ et le lemme 3.1. Remarquons que, par les propositions 2.3 et 2.5, on a

$$\partial_k E_i(k) > 0 \quad \forall k \neq -\infty .$$

(2):

$$\begin{aligned}
(2) &= |(\psi_{\perp}, C\psi_i)| \leq \|\psi_{\perp}\| \|C\psi_i\| \\
&\stackrel{(4.2)}{\leq} \frac{W_0}{B-\delta} \|C\psi_i\|
\end{aligned}$$

et pour $\|C\psi_i\|^2$ on a

$$\begin{aligned}
\|C\psi_i\|^2 &= 4 (\psi_i, (p_y - Bx)^2 \psi_i) \\
&\leq 4 (\psi_i, [p_x^2 + (p_y - Bx)^2 + U] \psi_i) \\
&\quad + 4 (\psi_{\perp}, [p_x^2 + (p_y - Bx)^2 + U] \psi_{\perp}) \\
&\quad + 4 \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (\psi_j, [p_x^2 + (p_y - Bx)^2 + U] \psi_j) \\
&= \underbrace{4 (\psi, H_0 \psi)}_{=4(\psi, H\psi)} + 4 (\psi, W\psi) - 4 (\psi, W\psi) \leq 4(E + W_0) ,
\end{aligned}$$

donc

$$(2) \leq 2 \frac{W_0}{B-\delta} \sqrt{E + W_0} .$$

(4): Un raisonnement tout à fait similaire donne

$$(4) \leq 2 \frac{W_0}{B-\delta} \sqrt{E + W_0} .$$

(3):

$$\begin{aligned}
 (3) &\leq 2 \int_{\mathbb{R}} dk |\psi_i(k)| |\psi_j(k)| \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx |\varphi_{j,k}(x)| |k - Bx| |\varphi_{i,k}(x)|}_{g(k)} \\
 &= 2 \int_{\Omega_i} |\psi_i(k)| |\psi_j(k)| g(k) dk + 2 \int_{\Omega_j} |\psi_i(k)| |\psi_j(k)| g(k) dk \\
 &+ 2 \int_{(\Omega_i \cup \Omega_j)^c} |\psi_i(k)| |\psi_j(k)| g(k) dk \\
 &\leq \overbrace{2 \int_{\Omega_j^c} |\psi_i(k)| |\psi_j(k)| g(k) dk}^{(I)} + 2 \int_{\Omega_i^c} |\psi_i(k)| |\psi_j(k)| g(k) dk \\
 &+ 2 \int_{\Omega_i^c} |\psi_i(k)| |\psi_j(k)| g(k) dk
 \end{aligned}$$

car on peut choisir $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ ($i \neq j$). Or, par exemple, pour le carré du premier terme on peut écrire (inégalité de Cauchy-Schwarz sur $L^2(\mathbb{R}^2, dx dk)$)

$$\begin{aligned}
 (I)^2 &\leq \int_{\Omega_j^c} dk |\psi_j(k)|^2 \int_{\mathbb{R}} dx |\varphi_{j,k}(x)|^2 \\
 &\times \int_{\Omega_j^c} dk |\psi_i(k)|^2 \int_{\mathbb{R}} dx (k - Bx)^2 |\varphi_{i,k}(x)|^2 \\
 &\leq \int_{\Omega_j^c} dk |\psi_j(k)|^2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dk |\psi_i(k)|^2 \int_{\mathbb{R}} dx \varphi_{i,k}^*(x) H_0(k) \varphi_{i,k}(x)}_{=(\psi_i, H_0 \psi_i)} \\
 &\stackrel{(4.1)}{\leq} \frac{W_0^2}{\inf_{k \in \Omega_j^c} (E_j(k) - E)^2} (E + W_0) ;
 \end{aligned}$$

un raisonnement analogue sur les deux autres termes donne

$$|(3)| \leq 2W_0 \sqrt{E + W_0} \left(\frac{1}{\sqrt{\inf_{k \in \Omega_j^c} (E_j(k) - E)^2}} + \frac{2}{\sqrt{\inf_{k \in \Omega_i^c} (E_i(k) - E)^2}} \right) .$$

En utilisant les estimations que l'on vient d'établir, ainsi que (4.3) on a

$$\begin{aligned}
 (\psi, C\psi) &\geq \underbrace{\min_{0 \leq i \leq n} \partial_k E_i(k_{c_i})}_{\mathcal{I}} \left\{ 1 - W_0^2 \left[\frac{1}{(B - \delta)^2} + \sum_{i=0}^n \sup_{k \in \Omega_i^c} (E_i(k) - E)^{-2} \right] \right\} \\
 &\quad - 2W_0 \sqrt{E + W_0} \underbrace{\left\{ 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} \left(\frac{1}{\sqrt{\inf_{k \in \Omega_j^c} (E_j(k) - E)^2}} + \frac{2}{\sqrt{\inf_{k \in \Omega_i^c} (E_i(k) - E)^2}} \right)}_{\doteq \Theta(E)} \right\} \\
 &\quad + (2n + 3) \frac{1}{B - \delta} \left. \right\};
 \end{aligned}$$

et la condition (4.5) est satisfaite pour $W_0 > 0$ assez petit. En effet, étant donné que le terme \mathcal{I} est strictement positif (car $k_{c_i} \in \Omega_i$ qui par hypothèse ($\delta < B$) peut être choisi disjoint de $\{-\infty\}$), si $W_0 > 0$ est assez petit on aura bien $(\psi, C\psi) > 0$.

L'équation suivante donne la borne supérieure $\mathcal{B}(\delta)$ pour W_0 :

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{I} \left\{ 1 - W_0^2 \left[\frac{1}{(B - \delta)^2} + \sum_{i=0}^n \sup_{k \in \Omega_i^c} (E_i(k) - E)^{-2} \right] \right\} \\
 &\quad - 2W_0 \sqrt{E + W_0} \left\{ \Theta(E) + (2n + 3) \frac{1}{B - \delta} \right\} = 0. \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve du théorème 4.1. \square

Les mêmes remarques qui suivent la preuve du théorème 3.1 sont valables ici: le choix optimal des Ω_i est difficile, mais il faut qu'ils restent disjoints entre eux et disjoints de $\{-\infty\}$, ce qui assure la positivité du terme \mathcal{I} (condition suffisante).

On peut regarder le cas particulier d'un seul croisement, c'est-à-dire lorsque E se trouve entre les deux premiers niveaux de Landau; la condition (4.6) prend la forme plus simple suivante

$$\begin{aligned}
 &\partial_k E_0(k_{c_0}) \left\{ 1 - W_0^2 \left(\frac{1}{(B - \delta)^2} + \sup_{k \in \Omega_0^c} (E_0(k) - E)^{-2} \right) \right\} \\
 &\quad - 6W_0 \sqrt{E + W_0} \frac{1}{B - \delta} = 0
 \end{aligned}$$

où, rappelons-le, $k_{c_0} \in \Omega_0$.

4.3 Existence du spectre

Il faut encore voir si $\Delta_n(B, \delta)$ est contenu dans le spectre. Pour cela on a le théorème suivant.

Théorème 4.2. *Sous la condition du théorème 4.1 on a*

$$\Delta_n(B, \delta) \subset \sigma(H).$$

PREUVE. Il s'agit de vérifier que le lemme 3.4 est valable dans ce cas. Ceci se vérifie facilement en remarquant que $U \geq 0$. Et comme $E \in \Delta_n(B, \delta)$, donc $E \in \sigma(H_0)$, le reste de la preuve suit en appliquant le lemme 3.6. \square

Conclusion et commentaires

Comme pour le modèle précédent on a établi l'existence d'intervalles à spectre purement continu entre les niveaux de Landau. Aussi ici la borne à $W_0, \mathcal{B}(\delta)$, n'est pas uniforme et on ne peut pas traiter la limite $E \rightarrow +\infty$.

Remarque Les résultats obtenus avec cette méthode donnent des résultats meilleurs par rapport à ceux obtenus dans [12]. Ici on ne donne aucune condition sur la dérivée $\partial_x W$, de plus on arrive à traiter le cas $\mu \rightarrow +\infty$ pour le cas du mur polynômial.

La dépendance du paramètre μ dans l'étude fait par [12] doit être introduite de façon explicite pour permettre de considérer la présence du mur. Ici, au contraire, il n'est pas nécessaire d'insérer explicitement μ car l'étude des branches spectrales relève déjà l'existence du mur.

Par contre le problème d'une borne uniforme en n reste ouvert.

Chapitre 5

Une généralisation: Champ inhomogène avec mur

5.1 Introduction

Dans ce chapitre on considère le cas d'un champ inhomogène comme au chapitre 3, et on ajoute un mur parabolique $U(x) = x^2$ dans la région des $x > 0$.

L'hamiltonien sans impuretés est donc

$$H_0 = p_x^2 + (p_y - A)^2 + U \quad (5.1)$$

avec

$$A(x) = \int_0^x B(\xi) d\xi$$

et

$$U(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

Après la caractérisation du spectre de H_0 et des branches spectrales E_n associées à la décomposition de H_0 en intégrale directe on ajoute un potentiel W borné comme dans les cas précédents.

5.2 Branches spectrales

Par le théorème de Kato-Rellich et le théorème 2.1, les branches spectrales E_n sont des fonctions analytiques et le spectre de $H_0(k)$ est ponctuel

non dégénéré.

Les limites asymptotiques des branches spectrales sont obtenues en remarquant que l'hamiltonien

$$H_0(k) = p_x^2 + (k - A)^2 + U(x)$$

est unitairement équivalent à

$$\tilde{H}_0(k) = p_x^2 + \left(k - A \left(x + \frac{k}{B(k)} \right) \right)^2 + U \left(x + \frac{k}{B(k)} \right)$$

et donc

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} E_n(k) = (2n + 1)B_-, \quad n \in \mathbb{N}$$

car dans cette limite le mur disparaît et $A \left(x + \frac{k}{B(k)} \right) = B_-x + k$; d'autre part

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} E_n(k) = +\infty$$

car dans ce cas le potentiel U diverge.

Proposition 5.1. *Pour tout $k \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$\partial_k E_n(k) = 2(\varphi_{n,k}, (k - A)\varphi_{n,k}) > 0.$$

PREUVE. Par le théorème de Helmann-Feynman on a

$$\partial_k E_n(k) = 2(\varphi_{n,k}, (k - A)\varphi_{n,k}) \tag{5.2}$$

d'autre part

$$(\varphi_{n,k}, [-ip_x, H_0(k)]\varphi_{n,k}) = (\varphi_{n,k}, [2B(k - A) - U']\varphi_{n,k}) = 0. \tag{5.3}$$

Pour prouver la deuxième égalité on procède comme dans la preuve du lemme 3.3; voici une esquisse:

$$\begin{aligned} \|[2B(k - A) - U']\varphi\|^2 &\leq 8\|B\|_\infty^2 \|(k - A)\varphi\|^2 + 2\|U'\varphi\|^2 \\ &\leq 8(\|B\|_\infty^2 + 1)\|H_0(k)\varphi\| < \infty \end{aligned}$$

car $\varphi \in \mathcal{D}(H_0(k))$ par hypothèse; on introduit l'opérateur $R_\lambda \doteq \lambda(-ip_x + \lambda)^{-1}$ ($\lambda > 0$), il s'agit alors de voir si $\|H_0(k)R_\lambda\varphi\| < \infty$ uniformément en λ . On a

$$\|H_0(k)R_\lambda\varphi\| \leq \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \|e^{-ip_x t} H_0(k) e^{ip_x t} \varphi\| dt$$

et comme (on introduit explicitement $U(x) = x^2 \vartheta(x)$, où ϑ est la fonction saut de Heaviside)

$$\begin{aligned} e^{-ip_x t} H_0(k) e^{ip_x t} &= p_x^2 + (k - A(\cdot - t))^2 + U(\cdot - t) \\ &= p_x^2 + (k - A)^2 + 2(k - A)(A - A(\cdot - t)) + (A - A(\cdot - t))^2 \\ &\quad + \underbrace{(x - t)^2 \vartheta(x - t)}_{\leq (x-t)^2 \vartheta(x)} \\ &\leq H_0(k) + 2B_+ t(k - A) + B_+^2 t^2 - tU' + t^2 \end{aligned}$$

car

$$A(x) - A(x - t) = \int_{x-t}^x B(\xi) d\xi \leq B_+ t.$$

On voit donc que

$$\|e^{-ip_x t} H_0(k) e^{ip_x t} \varphi\| \leq \|H_0(k) \varphi\| + 2(B_+ + 1) \|H_0(k) \varphi\|^{1/2} t + (B_+^2 + 1) t^2 ;$$

le reste est identique à la preuve du lemme 3.3.

En combinant (5.2) et (5.3), pour un $B_0 \in \mathbb{R}^*$

$$\partial_k E_n(k) = \frac{2}{B_0} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left[(B(x) - B_0)(A(x) - k) + \frac{U'(x)}{2} \right]}_{\Delta} |\varphi_{n,k}(x)|^2 dx$$

clairement $U' \geq 0$; et comme pour tout $k \in \mathbb{R}$ il existe un (unique) $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $k = A(x_0)$, en posant $B_0 = B(x_0) > 0$ on a

$$\Delta = (B(x) - B(x_0))(A(x) - A(x_0)) > 0$$

l'inégalité suit de la monotonie de A et B . □

5.3 Stabilité du spectre continu

L'allure des branches spectrales est comme dans la figure 4.1 où au lieu de B il faut substituer B_- .

La preuve d'existence de spectre continu pour des perturbations suffisamment faibles est exactement la même que celle du chapitre 4 quitte à changer B en B_- et Bx en $A(x)$.

Les conclusions sont donc les mêmes que pour le modèle avec mur.

5.4 Généralisations et perspectives

Sur ce modèle on voit que la méthode utilisée dans le cadre de ce travail, pour déterminer l'absence de spectre ponctuel, se prête pour l'étude de plusieurs types d'hamiltoniens. Il est clair qu'une question fondamentale à laquelle il faut répondre avant d'appliquer la méthode en question est celle du comportement des branches spectrales.

On esquisse ci-dessous les conditions essentielles pour appliquer la méthode à d'autres problèmes d'hamiltoniens bidimensionnels.

Supposons que l'on ait un opérateur auto-adjoint $H = H_0 + W$, qui agit dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2)$, qui satisfait

1. H_0 ne dépend pas de y ,
2. $H_0 \geq 0$ (terme à terme),
3. le potentiel "associé" à H_0 diverge pour $|x| \rightarrow \infty$ (p_y fixé), et est strictement monotone si $|x| > R_0$,
4. H_0 est quadratique en p_y (ce qui est souvent le cas pour les hamiltoniens)
5. W est borné ($\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |W(x,y)| = W_0 < \infty$).

La condition 1. entraîne la décomposabilité de H_0 en intégrale directe ($H_0 = \int^\oplus H_0(k) dk$), les conditions 2. et 3. impliquent que le spectre de $H_0(k)$ est ponctuel non dégénéré. La condition 4. est une condition technique qui permet, d'une part de "récupérer" l'hamiltonien à partir de $[-iy, H_0]$ via l'inégalité de Schwarz, et d'autre part de conclure que les branches spectrales sont analytiques.

D'autre part supposons que les branches spectrales (qui existent en vertu des hypothèses sur H_0) satisfont

6. $\partial_k E_n(k) > 0$ localement en $k \forall n \in \mathbb{N}$.

Soit $E \in \mathbb{R}$ qui satisfait

1. $E \in \sigma_c(H_0)$,
2. $\text{dist}(E, E_n(\tilde{k})) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout \tilde{k} solution de $\partial_k E_n(\tilde{k}) = 0$,
3. le nombre de croisements entre E et les branches spectrales est fini,
4. les croisements de E avec les branches spectrales se fait en des points contenus dans des intervalles sur lesquels les branches spectrales sont strictement monotones croissantes.

Alors, sous ces contraintes, imposées à l'hamiltonien H et à la valeur E de l'énergie, la méthode sera applicable et, modulo la possibilité de maîtriser les questions techniques, $E \in \sigma_c(H)$ pour W_0 assez petit.

Une *perspective* pour la méthode développée dans ce travail est l'étude de systèmes pour lesquels on pourrait affaiblir la condition 6. sur les branches spectrales, ainsi que le point 4. sur le choix de l'énergie E (voir ci-dessus). Il serait intéressant de pouvoir traiter le cas où on a des croisements multiples de E avec les branches spectrales, en des points où la dérivée de ces dernières n'a pas le même signe.

On donne ici deux exemples en relation avec les modèles étudiés aux chapitres 3 et 4.

- Premièrement le cas d'un champ magnétique inhomogène avec limites

asymptotiques de signes différents. En effet l'étude des branches spectrales (voir l'annexe C, proposition C.4) suggère qu'elles ne sont pas monotones (au moins pour l'état fondamental).

- Deuxièmement le cas d'un champ magnétique homogène avec deux murs qui confinent le système dans une direction d'espace. Ce cas serait très intéressant, comme on le verra au chapitre 6, pour son contenu physique.

Chapitre 6

Considérations physiques

Les phénomènes physiques qui sont liés à l'étude des modèles considérés dans ce travail sont plusieurs, on en traite brièvement deux. Pour les deux modèles on a ceux qu'on appelle *phénomènes de localisation et délocalisation* qui sont liés aux *systèmes désordonnés*; pour le modèle avec mur on a en plus l'*effet Hall quantique*.

On va donc discuter ces deux phénomènes et leur connexion avec les résultats obtenus.

6.1 Localisation, délocalisation et systèmes désordonnés

6.1.1 États localisés et délocalisés

Si H est l'hamiltonien qui décrit une particule (ici un électron), alors l'espace de Hilbert \mathcal{H} dans lequel agit H peut s'écrire $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_c$, où \mathcal{H}_{pp} est engendré par les vecteurs propres correspondants aux états liés de H et \mathcal{H}_c correspond au spectre continu H (états de diffusion pour la partie absolument continue de \mathcal{H}_c).

On voudrait caractériser le comportement asymptotique des fonctions propres généralisées de l'hamiltonien [9]. Deux cas peuvent se présenter:

1. les fonctions propres décroissent spatialement assez vite pour être de carré intégrable,
2. elles ne sont pas de carré intégrable.

En suivant la caractérisation de Ruelle [18] des espaces \mathcal{H}_{pp} et \mathcal{H}_c on a:

1. si ψ appartient à \mathcal{H}_{pp} alors il restera essentiellement concentré dans une région bornée de l'espace pour tout temps,

2. si ψ appartient à \mathcal{H}_c alors il sera diffusé, et la probabilité de trouver la particule dans une région bornée de l'espace tend vers zéro pour des grands temps.

Le premier cas correspond physiquement à une *localisation* du paquet d'onde et donc une localisation de la particule dans une région bornée de l'espace, alors que, dans le deuxième cas, on a une *délocalisation*.

Du point de vue de la théorie spectrale, ces deux situations reviennent à classer le spectre de l'hamiltonien en *spectre ponctuel* et *spectre continu*. Si on a une localisation, donc il existe une fonction d'onde carré intégrable, on aura du spectre ponctuel, dans le cas contraire le spectre sera continu.

Remarque Le cas d'une valeur propre infiniment dégénérée est subtil. Avec une base de son sous-espace propre (qui est donc dans L^2) on peut construire, avec une combinaison linéaire infinie, des fonctions qui ne sont plus dans L^2 .

6.1.2 Effet du désordre et localisation

Supposons que l'hamiltonien H_0 décrive l'évolution d'une particule et que son spectre soit continu. On ajoute alors des impuretés dans le système de telle sorte qu'on ait un système désordonné, le nouvel hamiltonien est $H = H_0 + W$.

Remarquons que l'on pourrait ajouter des impuretés, toutes identiques, sur chaque site d'un réseau périodique; on aura donc une particule qui se meut dans un cristal parfait.

Pour le potentiel W qui caractérise le désordre on a plusieurs choix possibles [11], voici deux exemples.

Désordre structurel ou topologique

Ce type de désordre correspond à la description de la matière amorphe. Le potentiel W est donné par (pour un système bidimensionnel)

$$W(x,y) = \sum_i V(x - x_i, y - y_i)$$

avec x_i et y_i des variables aléatoires.

Les impuretés sont distribuées aléatoirement dans le plan \mathbb{R}^2 et elles ont toujours la même structure (V n'est pas aléatoire).

Désordre compositionnel

Dans ce cas on a la description d'un cristal où on a l'invariance par translation en ce qui concerne la structure du réseau, mais sur chaque site on a un

impureté différente. Pour un système bidimensionnel le potentiel W est donné par

$$W(x,y) = \sum_{i,j} X_{i,j} V(x-i, y-j)$$

avec $X_{i,j}$ des variables aléatoires.

Les impuretés sont distribuées sur un réseau bien déterminé, mais l'amplitude est distribuée aléatoirement.

Après l'adjonction de W on s'intéresse à connaître sous quelles conditions le spectre continu de H_0 , où une partie, reste stable (c'est-à-dire il est conservé après avoir ajouté W).

Pour des hamiltoniens aléatoires unidimensionnels tous les états solutions de l'équation de Schrödinger doivent être localisés aussi faible que soit le niveau de désordre. Pour les hamiltoniens aléatoires en trois dimensions, Anderson a montré que, si le désordre est suffisamment grand, tous les états sont localisés [9].

6.1.3 Commentaire des résultats

Dans ce travail on a d'abord montré que, pour les hamiltoniens H_0 ((1.1) et (1.3)) le spectre est continu (plus précisément absolument continu) ce qui correspond donc à des états délocalisés. Après l'adjonction des impuretés on cherche à déterminer sous quelles conditions, sur le potentiel W , le spectre de $H = H_0 + W$ reste continu, c'est-à-dire quelle est la condition pour ne pas avoir localisation.

On montre que, pour une vaste classe de potentiels qui peuvent être soit déterministes soit aléatoires, et sous la condition que $\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |W(x,y)|$ est suffisamment petit, une partie du spectre continu de H_0 reste continu. Plus précisément on a préservation du spectre continu dans des intervalles situés entre les niveaux d'énergie correspondant aux "niveaux de Landau".

6.2 Effet Hall quantique

L'analyse du modèle avec mur s'inscrit dans le contexte plus général de l'étude microscopique de l'effet Hall quantique.

Rappelons brièvement de quoi il s'agit (voir par exemple [14] ou [4]).

6.2.1 Effet Hall quantique entier

Considérons un système d'électrons bidimensionnel, confiné dans un domaine rectangulaire de taille $L_x \times L_y$, et soumis à un champ magnétique

constant intense dans la direction perpendiculaire au plan. Alors, sous certaines conditions (voir la suite), le tenseur de conductivité prend la forme suivante

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_H \\ -\sigma_H & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \sigma_H = n \frac{e^2}{h}$$

où e est la charge élémentaire, h le quantum d'action de Planck et n un entier.

Du point de vue classique on relie le champ électrique \mathbf{E} au courant \mathbf{J} , via le tenseur de resistivité $\boldsymbol{\rho}$, par la loi d'Ohm

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\rho} \mathbf{J} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & -\rho_H \\ \rho_H & \rho_{yy} \end{pmatrix}$$

avec $\rho_{xx} = R_L \frac{L_y}{L_x}$ et $\rho_{yy} = R_L \frac{L_x}{L_y}$, où R_L est la resistance longitudinale, et $\rho_H = R_H = \frac{E_x}{J_y}$, R_H s'appelle la résistance Hall. Classiquement on trouve $R_H = \frac{B}{ne}$, et R_L inversement proportionnel au temps de diffusion τ de l'électron.

Dans une approche d'*électrons indépendants*, les niveaux d'énergie de ce système sont les niveaux de Landau et il sont fortement dégénérés. Le nombre d'états par unité de surface dans un niveau est $n_B = \frac{eB}{h}$; on définit le facteur de remplissage (filling factor) par $\nu = \frac{n}{n_B}$ avec n la densité électronique.

Expérimentalement on observe l'allure reportée sur la figure 6.1, pour la conductivité Hall $\sigma_H = R_H^{-1}$ en fonction de ν .

Il faut remarquer qu'ici on a un gaz de Fermi libre; les états électroniques sont remplis en accord avec le principe d'exclusion de Pauli. La figure 6.1 montre que la conductivité Hall σ_H possède des plateaux centrés autour des valeurs ν entiers et présente des sauts lorsque ν est demi-entier; cette dernière situation correspond à une densité électronique qui vaut $n = \frac{r}{2} n_B$ (r entier), c'est-à-dire que les niveaux de Landau sont demi-remplis.

Remarquons que lorsque la conductivité de Hall a un plateau, la résistance longitudinale R_L s'annule, et le tenseur de conductivité est à diagonale nulle; dans cette région le système devient non dissipatif.

Pour conclure, il est intéressant de mentionner que lorsqu'on introduit l'interaction coulombienne entre électrons la conductivité Hall possède des plateaux non seulement pour des valeurs entiers multiples de $\frac{e^2}{h}$, mais aussi pour des valeurs du type

$$\sigma_H = \frac{p e^2}{q h}$$

avec p, q des entières, et q typiquement impair. C'est l'*effet Hall quantique fractionnaire*.

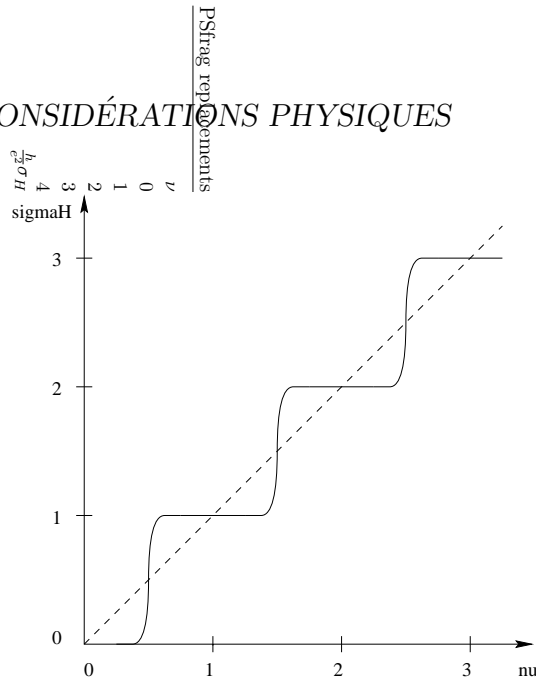


FIG. 6.1 – Plateaux de Hall. Courbe pleine: prédiction quantique, courbe traitillé: prédiction classique. FIG. 6.1 – Plateaux de Hall. Courbe pleine: prédiction quantique, courbe traitillé: prédiction classique.

6.2.2 Effet des impuretés

Pour observer l'effet Hall quantique entier, la présence d'impuretés joue un rôle essentiel; en effet sous l'effet du désordre, les niveaux de Landau s'élargissent en bandes. Au bord de celles-ci, le spectre est ponctuel et on a des états localisés, tandis que dans le voisinage du niveau de Landau original, les états correspondant sont délocalisés.

Or, seulement les états délocalisés peuvent porter du courant à la température du zéro absolu, on comprend alors l'allure qualitative de la figure 6.1. Lorsque on remplit une bande (selon le principe de Pauli) on a d'abord des états localisés, donc la conductivité σ_H reste constante, mais lorsque la bande est presque demi-remplie on a des états délocalisés et la conductivité σ_H a un saut, puis on retrouve de nouveau des états localisés.

On voit donc que l'effet Hall quantique est étroitement lié à la nature délocalisée des états au voisinage du centre des bandes de Landau créés par la présence de désordre [10].

6.2.3 Existence de courants de bord et connexion avec le modèle avec mur

Regardons maintenant le rôle joué par le bord du système en suivant les idées de Halperin [6]. Ceci fait la connexion avec le modèle avec mur étudié

dans ce travail.

L'idée principale de Halperin est la suivante. Dans un système bidimensionnel confiné d'électrons indépendants, soumis à un fort champ magnétique perpendiculaire, il existe des états électroniques qui sont délocalisés autour du bord du système. Ces derniers portent un courant, et contribuent à la conductivité Hall quantifiée (si le niveau de Fermi sur les bords opposés du système est différent). En plus, ces états restent délocalisés après l'adjonction d'un désordre pas trop intense.

Halperin considère la géométrie suivante.

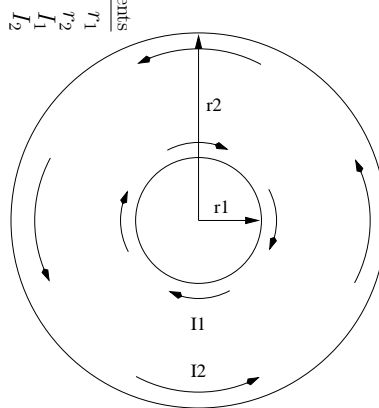


FIG. 6.2 – Géométrie du système. Le champ magnétique B est constant entre r_1 et r_2 et nul ailleurs. Les flèches représentent les courants de bord. FIG. 6.2 – Géométrie du système. Le champ magnétique B est constant entre r_1 et r_2 et nul ailleurs. Les flèches représentent les courants de bord.

Remarquons que cette géométrie correspond au domaine de \mathbb{R}^2 suivant $\{(x,y) : 0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq L_y\}$ sur lequel on impose des conditions de bord périodiques selon la direction x ($x = x + L_x$). On voit ainsi que le modèle avec mur considéré dans ce travail correspond à un système comme celui-ci, modulo le fait que l'on impose un seul mur selon y . On va maintenant discuter les idées de Halperin, et on notera les analogies avec les résultats obtenus pour le modèle avec mur.

Il est naturel d'utiliser un système de coordonnées polaires (r, ϑ) , et de choisir la jauge où le potentiel vecteur s'écrit $(0, \frac{1}{2}Br)$. L'hamiltonien

$$H_0 = p_r^2 + (p_\vartheta - A_\vartheta(r))^2 + U(r)$$

est alors indépendant de ϑ et commute ainsi avec L_z (invariance par rotation

dans le plan, L_z étant le moment cinétique de nombre quantique m), il est donc décomposable (en somme directe).

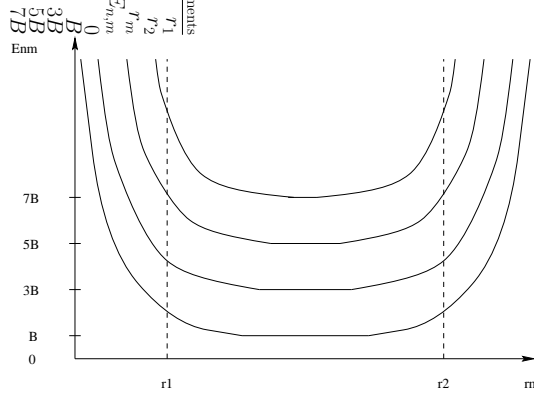
Les pseudo-fonctions propres, loin du mur, s'écrivent

$$\phi_{n,m}(r,\vartheta) = \frac{e^{im\vartheta}}{\sqrt{2\pi}} \varphi_n(r - r_m)$$

avec φ_n les fonctions propres de l'oscillateur harmonique et $r_m = \sqrt{\frac{2m}{B}}$, ceci à condition que $r_1 < r_m < r_2$ et $|r_i - r_m| \gg r_c \sim \frac{1}{\sqrt{B}}$ pour $i = 1,2$ (pas de mur, on suppose $r_c \ll r_1, r_2 - r_1$); les énergies associées sont $E_n = (2n + 1)B$. Pour $r_m \simeq r_i$ ($r_m = r_i - \alpha r_c$, α petit), $i = 1,2$, la situation est différente et l'effet du mur doit être considéré. Les pseudo-fonctions propres de H_0 peuvent s'écrire

$$\phi_{n,m}(r,\vartheta) = \frac{e^{im\vartheta}}{\sqrt{2\pi}} \psi_n(r - r_m)$$

où n indexe le nombre de noeuds de la fonction d'onde radiale, $-\infty < r - r_m \leq r_2 - r_m$, si on considère le mur externe, et $r_1 - r_m < r - r_m < \infty$ si on regarde près du mur intérieur; cette condition revient donc à poser $\psi_n \equiv 0$ sur le bord de l'anneau. L'énergie pour $r_m \simeq r_i$ est une fonction monotone, les "branches spectrales" ont l'allure reportées sur la figure 6.3¹.



øFIG. 6.3 – Allure qualitative des niveaux d'énergie (remarquer que $r_m \sim \sqrt{m}$). FIG. 6.3 – Allure qualitative des niveaux d'énergie (remarquer que $r_m \sim \sqrt{m}$).

1. Remarque: les branches spectrales sont, par définition, des fonction de la variable m (qui équivaut à la variable k des chapitres précédents), dans la figure 6.3 on reporte $E_{n,m}$ comme fonction de r_m , ceci se "justifie" part le fait que $r_m^2 \sim m$.

On peut calculer le courant azimuthal porté par les états $\phi_{n,m}$. Il vaut (dans les unités choisies ici $\tilde{m} = \frac{1}{2}$ (la masse) et $e = 1$)²

$$I_{n,m} = 2 \int_0^\infty |\phi_{n,m}(r,\vartheta)|^2 \left(\frac{m}{r} - A_\vartheta(r) \right) dr .$$

Dans la situation où r_m est à l'intérieur de l'anneau ($r_1 \ll r_m \ll r_2$), on peut écrire

$$I_{n,m} = 2B \int_0^\infty |\phi_{n,m}(r,\vartheta)|^2 (r_m - r) dr$$

car pour $|r_m - r| \gg r_c$ la densité de probabilité $|\varphi_{n,m}|^2$ décroît très vite. D'autre part $|\varphi_{n,m}|^2$ est symétrique par rapport à $r = r_m$ de telle sorte que l'intégrale est nulle: le courant total dans l'anneau est donc nul.

Lorsque par contre r_m est près du bord $|\phi_{n,m}|^2$ n'est plus symétrique et $I_{n,m} \neq 0$, il y a donc des courants sur les bords de l'anneau.

Ces résultats peuvent se voir aussi en remarquant que

$$I_{n,m} = \frac{\partial E_{n,m}}{\partial m} ,$$

si $B > 0$ pour $r_m \simeq r_1$ on a $I_{n,m} < 0$ et pour $r_m \simeq r_2$ on a $I_{n,m} > 0$.

Pour trouver le courant total, porté par les états aux bords de l'anneau, il faut sommer sur tous les états (n,m) occupés. Pour cela supposons que le niveau de Fermi soit situé entre les niveaux E_{N-1} et E_N à l'intérieur de l'anneau, et qu'il prend les valeurs $E_F^{(1)} \neq E_F^{(2)}$ pour $r = r_1$ et $r = r_2$; alors on trouve

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=0}^{N-1} (E_{i,m_{\max}} - E_{i,m_{\min}}) \\ &= N \left(E_F^{(2)} - E_F^{(1)} \right) . \end{aligned}$$

On voit donc que, si les niveaux de Fermi aux bords du système sont différents, il y a un courant non nul qui circule dans l'anneau.

Considérons maintenant la situation où il y a un désordre aléatoire dans le système, représenté par un potentiel V . Supposons que l'énergie de Fermi

2. Le courant considéré ici est défini par la formule

$$I_{n,m} = e \int_{\substack{r \in \mathbb{R}_+ \\ \theta \text{ fixée}}} \phi_{n,m}^*(r,\vartheta) \underbrace{\frac{1}{\tilde{m}} \left(\frac{-i\partial_\theta}{r} - A_\theta(r) \right)}_{\hat{\theta}} \phi_{n,m}(r,\vartheta) dr .$$

soit située entre les les niveaux E_{N-1} et E_N comme ci-dessus. Pour $r \simeq r_i$ il existe des états avec une énergie près de E_F (ce qui n'est pas le cas à l'intérieur de l'anneau). Développons alors ces états ψ sur la base des $\phi_{n,m}$ définis précédemment, et soient $c_{n,m}$ les coefficients de Fourier de ce développement. Considérons le cas $r \simeq r_2$.

Les coefficients $c_{n,m}$ avec $n > N - 1$ seront petits, de l'ordre de $\frac{V}{B}$; tandis que les autres ($n \leq N - 1$) seront assez grands, sauf si $|r_2 - r_m| \gg r_c$.

Le courant porté par un état ψ est donné par

$$I_\psi = (\psi, 2 \left[\frac{m}{r} - A_\vartheta \right] \psi) = \sum_{\substack{m \\ n, n'}} c_{m, n'}^* c_{m, n} I_{m; n, n'}$$

avec

$$I_{m; n, n'} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\vartheta \phi_{m, n'}^*(r, \vartheta) \phi_{m, n}(r, \vartheta) \left(\frac{m}{r} - A_\vartheta(r) \right) dr .$$

Les termes non croisés ($n = n'$) sont identiques au courant défini pour le système non désordonné, ils sont donc non nuls; les termes croisés ($n \neq n'$), par contre, deviennent petits lorsque $\frac{V}{B}$ diminue. Ainsi, même en présence d'un faible désordre il existe encore des états localisés radialement près du bord qui portent du courant, $I_\psi \neq 0$.

Remarques

- On remarque la ressemblance de ces résultats avec l'étude du chapitre 4. Pour prouver qu'il existe du spectre continu entre les niveaux de Landau, si le désordre est suffisamment petit, on a supposé l'existence d'une fonction propre pour une énergie qui se trouve entre ces niveaux; on a ensuite montré que ceci est impossible pour un faible désordre. Pour prouver cela on a utilisé le commutateur $[-iy, H]$. Or, sa valeur moyenne sur un état propre ψ de l'hamiltonien H doit être nulle; mais, comme $(\psi, [-iy, H]\psi) = I_\psi$, on voit bien que ceci est impossible si le désordre est assez petit: on a donc "établi" une analogie entre le résultat de Halperin et celui du chapitre 4.
- Il faut remarquer le rôle essentiel joué par le(s) bord(s) du système pour les modèles "système Hall"; rôle joué par l'inhomogénéité du champ magnétique dans le modèle avec B inhomogène. Ce sont en effet ces éléments qui permettent l'existence d'états délocalisés qui portent du courant.

Commentaire sur les deux modèles étudiés

Dans les deux cas, on montre que si le désordre est assez petit, alors la valeur moyenne de $(\psi, [-iy, H]\psi)$ ne peut pas être nulle; donc il n'existe pas de fonctions propres $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ qui correspondent à l'énergie choisie.

Comme on vient de le voir, $(\psi, [-iy, H]\psi)$ correspond au courant porté par l'état ψ selon y (dans les unités choisies!); ainsi, du point de vue physique, la non nullité de $(\psi, [-iy, H]\psi)$ se traduit par la présence d'un courant dans la direction y .

L'état ψ considéré est délocalisé selon une direction (la direction y dans le cas des modèles étudiés), et localisé dans la direction perpendiculaire à la première (donc selon x). Le paquet d'onde, selon la direction x , est localisé autour de la coordonnée $x = x(E)$ qui dépend de l'énergie considérée.

Cette valeur, pour le cas du modèle avec mur, correspond à $x \simeq -\frac{k^*(E)}{B}$, donc près du bord pour un champ B assez intense. On voit ainsi que, près du mur, il existe des courants, et que celles-ci persistent pour un faible désordre.

Annexe A

Décomposition en intégrale directe

Représentations sur $L^2(\mathbb{R})$ des translations dans \mathbb{R}

L'espace de Hilbert que l'on considère est $L^2(\mathbb{R}, dy)$.
L'opérateur $p_y = -i\partial_y$ est le générateur des translations selon la direction y , il génère la représentation unitaire fortement continue $\{U(a)\}_{a \in \mathbb{R}}$ avec

$$U(a) = e^{-ip_y a} .$$

Prenant la transformée de Fourier sur la variable y , on a

$$(\mathcal{F}_y p_y \psi)(x, k) = k \hat{\psi}(x, k)$$

et donc

$$(\mathcal{F}_y U(a) \psi)(x, k) = e^{-ika} \hat{\psi}(x, k) .$$

Comme \mathcal{F}_y est unitaire $L^2(\mathbb{R}, dk) \simeq L^2(\mathbb{R}, dx)$; or $L^2(\mathbb{R}, dk)$ peut s'écrire [1, chap. 3]

$$L^2(\mathbb{R}, dk) = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbb{C} dk$$

(\mathbb{C} est l'espace des valeurs des fonctions f que l'on considère, c'est-à-dire $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, il est aussi appelé fibre).

Sur $L^2(\mathbb{R}, dk)$ la représentation $U(a)$ peut donc s'écrire

$$U(a) = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} U_k(a) dk$$

avec $U_k(a)$ la multiplication par e^{-ika} .

Remarque Comme $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe abélien, toute représentation irréductible est de dimension un [1, chap. 2]. On a donc décomposé $U(a)$ en une intégrale directe de représentations irréductibles.

Représentations sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ des translations dans \mathbb{R}

Considérons maintenant l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^2, dx dy)$. On va le caractériser comme suit¹.

Comme $L^2(\mathbb{R}^2, dx dy)$ est isomorphe à $L^2(\mathbb{R}_x) \otimes L^2(\mathbb{R}_y)$ il est aussi isomorphe à $L^2(\mathbb{R}_y; L^2(\mathbb{R}_x))$ (voir [15, chap. 2]) et si on définit l'opérateur unitaire $\mathcal{F} = I \otimes \mathcal{F}_y$, qui n'est rien d'autre que la transformée de Fourier sur y , alors on peut écrire

$$L^2(\mathbb{R}^2, dx dy) \simeq L^2(\mathbb{R}_k; L^2(\mathbb{R}_x))$$

qui est la forme que l'on va considérer.

On peut écrire

$$L^2(\mathbb{R}_k; L^2(\mathbb{R}_x)) = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L^2(\mathbb{R}_x) dk \quad (\text{A.1})$$

et la représentation des translations dans $L^2(\mathbb{R}_k; L^2(\mathbb{R}_x))$ s'écrit donc

$$U(a) = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} U_k(a) dk$$

avec $U_k(a) = e^{-ika} I_{L^2(\mathbb{R}_x)}$.

Décomposabilité de H_0

Soit H un hamiltonien qui agit dans $L^2(\mathbb{R}^2, dx dy)$ indépendant de y , alors on a $[p_y, H] = 0$ et aussi $[U(a), H] = 0$, si $\{U(a)\}_{a \in \mathbb{R}}$ est la représentation engendrée par p_y .

Or, on vient de voir que $U(a)$ est décomposable en intégrale directe sur la fibre $L^2(\mathbb{R}_x)$, ce qui correspond à la décomposition (A.1) de l'espace de Hilbert. Comme $[U(a), H] = 0$, par rapport à cette décomposition, l'hamiltonien H admet aussi une décomposition en intégrale directe sur la même fibre $L^2(\mathbb{R}_x)$:

$$H = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H_k dk$$

avec H_k qui agit, par rapport à k comme $k I_{L^2(\mathbb{R}_x)}$.

1. on note $L^2(\mathbb{R}_\alpha)$ pour $L^2(\mathbb{R}, d\alpha)$

Remarque Pour être précis il faudrait écrire $\tilde{H} = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \tilde{H}_k dk$ avec $\tilde{H} = \mathcal{F}H\mathcal{F}^{-1}$ avec \mathcal{F} défini plus haut (H et \tilde{H} sont unitairement équivalents). La même remarque s'applique à $U(a)$.

Annexe B

Hamiltonien aléatoire

Modèle stochastique

Dans cet annexe, on considère le cas où les impuretés sont distribuées aléatoirement. La modélisation consiste à placer une impureté localisée et bornée sur chaque site du réseau $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Mathématiquement, on modélise cette situation comme suit. Pour tout $\omega \in \Omega$ on a une réalisation d'un potentiel aléatoire V_ω qui donne un hamiltonien aléatoire

$$H_\omega = H_0 + V_\omega .$$

Tout ω assigne à un site du réseau \mathbb{Z}^2 une valeur comprise dans l'intervalle $[-1,1]$; l'ensemble fondamental s'écrit alors $\Omega = \prod_{\mathbb{Z}^2} [-1,1] = [-1,1]^{\mathbb{Z}^2}$. La σ -algèbre \mathcal{F} définie sur Ω est celle engendrée par les cylindres, c'est-à-dire les ensembles de la forme

$$\{\omega \in \Omega \mid \omega_{(n_1, m_1)} \in \mathcal{A}_1, \dots, \omega_{(n_\ell, m_\ell)} \in \mathcal{A}_\ell\} ,$$

avec $(n_i, m_i) \in \mathbb{Z}^2$ et $\mathcal{A}_i \subset [-1,1]$ un ensemble borélien, ($1 \leq i \leq \ell, \ell \in \mathbb{N}$); (Ω, \mathcal{F}) est un espace mesurable sur lequel on va définir une mesure de probabilité.

On choisit un potentiel type *modèle d'Anderson*,

$$V_\omega(x, y) = \sum_{(n, m) \in \mathbb{Z}^2} X_{n, m}(\omega) V(x - n, y - m), \quad \omega \in \Omega$$

avec:

- V un potentiel borné tel que $V(x, y) = 0$ si $\sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{1}{2}$,

- $X_{n,m}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) (qui caractérisent donc le désordre)

$$\begin{aligned} X_{n,m} : \Omega &\longrightarrow [-1,1] \\ \omega &\longmapsto X_{n,m}(\omega) \doteq \omega_{(n,m)} . \end{aligned}$$

Comme les $X_{n,m}$ sont i.i.d. la mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) , définissant l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, est simplement la mesure produit

$$\mathbb{P} = \prod_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} P_0$$

avec $P_0(\mathcal{A}) = \mathbb{P}(X_{n,m}(\omega) \in \mathcal{A})$ pour tout \mathcal{A} borélien et $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$.

Le fait que les variables aléatoires sont indépendantes entraîne l'ergodicité de la mesure \mathbb{P} et de V_ω (théorème 0-1 de Kolmogorov); le groupe qui laisse invariant la mesure \mathbb{P} est celui des translations sur \mathbb{Z}^2 .

Le spectre de H_ω

Par des arguments généraux, on a le théorème suivant qui assure, qu'avec probabilité 1, le spectre de H_0 est contenu dans celui de H_ω .

Théorème B.1. *Soit $\omega \in \Omega$ et $H_\omega = H_0 + V_\omega$ comme ci-dessus, alors on a*

$$\sigma(H_0) \subset \sigma(H_\omega) \quad \mathbb{P} - p.s. .$$

PREUVE. Comme \mathbb{P} est une mesure ergodique il suffit de prouver que pour tout $\omega \in \Omega' \subset \Omega$, avec $\mathbb{P}(\Omega') > 0$, il existe $\varepsilon > 0$, ψ normalisé tel que si, $E \in \sigma(H_0)$,

$$\|(H_\omega - E)\psi\| \leq \varepsilon .$$

Or, comme $E \in \sigma(H_0)$ il existe $\varepsilon > 0$ et ψ de norme égale à un tel que

$$\|(H_0 - E)\psi\| \leq \frac{\varepsilon}{3} .$$

Prenons

$$\Omega' = \left\{ \omega \in \Omega \mid |X_{n,m}(\omega)| \leq \frac{\varepsilon}{3 \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |V(x,y)|}, \forall (n,m) \in \mathbb{B}_L \right\}$$

avec \mathbb{B}_L le carré de coté $2L + 1$ centré à l'origine. Remarquons que, comme le support de la distribution de probabilité associée aux $X_{n,m}$ contient l'origine, on a bien $\mathbb{P}(\Omega') > 0$.

Or, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|V_\omega\psi\| &\leq \left\| \sum_{(n,m)\in\mathbb{B}_L} X_{n,m}(\omega)V(x-n,y-m) \right\| \\ &+ \left\| \sum_{(n,m)\in\mathbb{B}_L^c} X_{n,m}(\omega)V(x-n,y-m) \right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |V(x,y)| \|\chi_{\mathbb{B}_L^c}\psi\| \end{aligned}$$

avec $\chi_{\mathbb{B}_L^c}$ la fonction caractéristique du complémentaire de \mathbb{B}_L . Choisissons alors L assez grand pour que le deuxième terme devient plus petit ou égal à

$\frac{\varepsilon}{3}$.
On a donc $\|V_\omega\psi\| \leq \frac{2}{3}\varepsilon$ et ainsi

$$\|(H_\omega - E)\psi\| \leq \|(H_0 - E)\psi\| + \|V_\omega\psi\| \leq \varepsilon .$$

□

Commentaires

Le théorème B.1 montre que, avec probabilité 1, le spectre de H_0 est contenu dans celui de H_ω et donc il en va de même pour les intervalles $\Delta_{n,m}(B_\pm, \delta)$, $\Delta_n(B, \delta)$ et $\Delta_n(B_-, \delta)$ considérés aux chapitres 3, 4 et 5.

Il est clair que si le potentiel V , qui définit V_ω , satisfait $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |V(x,y)| \leq W_0$ alors il en va de même pour V_ω ; donc si la condition du théorème 3.1 (respectivement 4.1) est satisfaite on aura que *pour presque tout* $\omega \in \Omega$ le spectre de H_ω reste continu dans les intervalles $\Delta_{n,m}(B_\pm, \delta)$ (respectivement $\Delta_n(B_-, \delta)$).

Les théorèmes 3.2 et 4.2 sont plus fortes que le théorème B.1, car assurent l'existence du spectre (qui est continu) dans les intervalles considérés ci-dessus *pour tout* $\omega \in \Omega$, c'est-à-dire, pour toute réalisation possible de l'hamiltonien aléatoire H_ω .

Annexe C

Quelques résultats sur le modèle avec B inhomogène lorsque $B_+ > 0 > B_-$

Dans cet annexe on donne quelques résultats sur les *branches spectrales* lorsque les limites asymptotiques B_{\pm} ont un signe opposé.

Sur \mathbb{R}_- on caractérise les fonctions E_n sous des hypothèses assez générales, tandis que sur \mathbb{R}_+ on ne traite que la branche spectrale E_0 dans un champ magnétique très particulier.

Les **hypothèses** générales suivantes sont faites¹:

1. $B \in C^\infty(\mathbb{R})$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\frac{dB(x)}{dx} > 0$,
2. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} B(x) = B_{\pm}$, avec $B_+ > 0 > B_-$.

Non dégénérescence et analyticité

La proposition 2.1 reste valable aussi dans ce cas: les branches spectrales sont des fonctions analytiques et pour tout $k \in \mathbb{R}$ le spectre de l'hamiltonien $H_0(k)$ est (ponctuel) non dégénéré.

Limites asymptotiques

Considérons d'abord la limite $k \rightarrow -\infty$.

1. Dans la suite on sous entend la validité de ces hypothèses sauf mention explicite du contraire.

Proposition C.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k < 0$*

$$E_n(k) \geq k^2, \quad k \in \mathbb{R}_-$$

d'où

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} E_n(k) = +\infty.$$

PREUVE. Soit $C = k^2$ et $H_k \doteq H_0(k) = p_x^2 + (k - A)^2$, alors pour $k < 0$ on a $H_k \geq C$; en effet on a $\mathcal{Q}(H_k) \subset \mathcal{Q}(C) = L^2(\mathbb{R})$ ($\mathcal{Q}(T)$ le domaine de forme de T); et comme $A(x) \geq 0$ pour tout x , $(\varphi, H_k \varphi) \geq (\varphi, C \varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{Q}(H_k)$. Par le principe du min-max on a $\mu_n(H_k) \geq \mu_n(C)$ [17, sect. XIII.1/2], avec $\mu_n(H_k) = E_n(k)$ et $\mu_n(C) = k^2$ ce qui conclut la preuve. \square

Une estimation pour une borne supérieure peut être facilement trouvée pour l'état fondamental grâce au principe variationnel. Un calcul avec la fonction d'essai

$$\varphi(x) = \left(\frac{B}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}Bx^2}$$

où $B > 0$, montre que pour

$$B(x) = \begin{cases} B_- & \text{si } x < 0 \\ B_+ & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

on a

$$E_0(k) \lesssim k^2 - Ck, \quad C > 0$$

pour $k \rightarrow -\infty$.

Le cas $k \rightarrow +\infty$ est plus difficile. Considérons l'**hypothèse (B)** suivante: B est donné par

$$B(x) = \begin{cases} B_- & \text{si } x < 0 \\ B_+ & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

avec $B_+ > |B_-|$.

Proposition C.2. *Sous l'hypothèse (B) on a*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} E_0(k) = |B_-|.$$

PREUVE. Soit $H_k \doteq H_0(k)$. Grâce au principe variationnel on trouve une borne supérieure à E_0 , et l'inégalité de Temple [17, thm. XIII.5] donne une borne inférieure. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(H_k)$ avec $\|\varphi\| = 1$ et $E_1 > \check{E}_1 > (\varphi, H_k \varphi)$ alors

$$(\varphi, H_k \varphi) - \frac{(\varphi, H_k^2 \varphi) - (\varphi, H_k \varphi)^2}{\check{E}_1 - (\varphi, H_k \varphi)} \leq E_0(k) \leq (\varphi, H_k \varphi).$$

Choisissons

$$\varphi(x) = \left(\frac{|B_-|}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}|B_-|(x + \frac{k}{|B_-|})^2}$$

et écrivons $H_k = H_L^- + W$ avec

$$\begin{aligned} H_L^- &= p_x^2 + |B_-|^2 \left(\frac{k}{|B_-|} + x \right)^2 \\ W &= \begin{cases} B_+^2 \left(\frac{k}{B_+} - x \right)^2 - |B_-|^2 \left(\frac{k}{|B_-|} + x \right)^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} (\varphi, H_k \varphi) &= |B_-| + (\varphi, W \varphi) \\ (\varphi, H_k^2 \varphi) &= |B_-|^2 + (\varphi, W^2 \varphi) + 2|B_-|(\varphi, W \varphi) \end{aligned}$$

car $H_L^- \varphi = |B_-| \varphi$. Le calcul des intégrales donne [5]

$$\begin{aligned} (\varphi, W \varphi) &= -\sqrt{\frac{|B_-|}{\pi}} \frac{e^{-k^2/|B_-|}}{k} \left\{ \frac{1}{2} (B_+ + |B_-|) + \frac{1}{8k^2} (B_+^2 - |B_-|^2) \right\} \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\frac{e^{-k^2}}{k^5}\right) \\ (\varphi, W^2 \varphi) &\stackrel{k \gg 1}{\cong} \left\{ (B_+^2 - |B_-|^2)^2 \frac{\Gamma(5)}{(2k)^5} \mathcal{R} + 4(B_+ + |B_-|)^2 \frac{\Gamma(3)}{2k} \mathcal{R} \right. \\ &\quad \left. - 4(B_+^2 - |B_-|^2) (B_+ + |B_-|) \frac{\Gamma(4)}{4k^3} \mathcal{R} \right\} \sqrt{\frac{|B_-|}{\pi}} e^{-k^2/|B_-|} \end{aligned}$$

avec $\mathcal{R} = 1 - \mathcal{O}(k^{-2})$ et Γ la fonction gamma d'Euler. On trouve donc que pour $k \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} (\varphi, W \varphi) &= \mathcal{O}\left(\mathbb{D}(k)e^{-k^2}\right) \\ (\varphi, W^2 \varphi) &= \mathcal{O}\left(\mathbb{D}(k)e^{-k^2}\right) \end{aligned}$$

avec $\mathbb{D}(k)$ une somme de fonctions en $k^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{N}$.

Ainsi

$$|B_-| - \mathcal{O}\left(\mathbb{D}(k)e^{-k^2}\right) \leq E_0(k) \leq |B_-| + \mathcal{O}\left(\mathbb{D}(k)e^{-k^2}\right)$$

et on a bien $\lim_{k \rightarrow +\infty} E_0(k) = |B_-|$. □

Remarque importante Dans la preuve précédente on n'a pas montré l'existence de \check{E}_1 .

Sur la base de l'observation qui suit on conjecture que les niveaux asymptotiques en $k = +\infty$ sont $\{(2n+1)B_\pm \mid n \in \mathbb{N}\}$.

D'une part on remarque que (on pose $H_k \doteq H_0(k)$) pour tout $k \in \mathbb{R}$ l'hamiltonien H_k (2.1) est unitairement équivalent à

$$\tilde{H}_k = p_x^2 + \left(k - A \left(x + \frac{k}{B(k)} \right) \right)^2,$$

et comme dans la limite $k \rightarrow +\infty$ on a $A \left(x + \frac{k}{B(k)} \right) = B_+x + k$, l'hamiltonien est celui d'un oscillateur harmonique de pulsation B_+ , donc les valeurs $(2n+1)B_+$ sont les limites d'une famille de valeurs propres de H_k .

D'autre part l'hamiltonien H_k (2.1) est aussi unitairement équivalent à

$$\tilde{H}_k = p_x^2 + \left(k - A \left(x + \frac{k}{B(-k)} \right) \right)^2,$$

et comme pour $k \rightarrow +\infty$, on a $A \left(x + \frac{k}{B(-k)} \right) = B_-x + k$, les valeurs $(2n+1)B_-$ sont également les limites d'une famille de valeurs propres de H_k .

Cela implique donc que si $B_+ > |B_-|$, alors le premier niveau excité reste séparé de l'état fondamental, ce qui permettrait d'en déduire l'existence de \check{E}_1 au moins pour k assez grand.

Monotonie

Partie $k \in \mathbb{R}_-$.

Proposition C.3. *Pour tout $k \leq 0$, $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$\partial_k E_n(k) < 0.$$

PREUVE. Par le théorème de Hellmann-Feynman on a

$$\partial_k E_n(k) = 2(\varphi_{n,k}, (k - A)\varphi_{n,k})$$

or comme $A(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ si $k < 0$ on conclut facilement que $\partial_k E_n(k) < 0$. \square

2. Remarque: si cette conjecture est prouvée, alors on a les limites asymptotiques pour un champ magnétique assez général.

Partie $k \in \mathbb{R}_+$.

Proposition C.4. *Sous l'hypothèse (B), pour $k > 0$ la fonction E_0 n'est pas monotone.*

PREUVE. Comme, $\lim_{k \rightarrow +\infty} E_0(k) = |B_-|$ et la fonction E_0 est continue, il suffit de montrer qu'il existe un $k_0 > 0$ tel que, pour une fonction variationnelle φ , on ait l'inégalité

$$(\varphi, H_0(k)\varphi) < |B_-|,$$

alors pour k_0 on a $E_0(k_0) < |B_-|$, vu que $(\varphi, H_0(k)\varphi) \geq E_0(k)$.

Choisissons φ et la décomposition de $H_k \doteq H_0(k)$ comme dans la première partie de la preuve de la proposition C.2; alors on a $(\varphi, H_k\varphi) = |B_-| + \Delta(k)$ avec (après le calcul des intégrales [5])

$$\Delta(k) = -\sqrt{\frac{|B_-|}{\pi}} \frac{e^{-k^2/|B_-|}}{k} \left\{ \frac{1}{2} (B_+ + |B_-|) + \frac{1}{8k^2} (B_+^2 - B_-^2) \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{e^{-k^2/|B_-|}}{k^5}\right)$$

d'où on conclut que pour k assez grand $\Delta(k) < 0$. □

Spectre de H_0

Comme les branches spectrales sont des fonctions analytiques non constantes, le spectre de H_0 est purement absolument continu, et on a

$$\sigma(H_0) = \sigma_{ac}(H_0) = [B^*, +\infty)$$

avec $B^* = \inf_{k \in \mathbb{R}_+} E_0(k)$.

Commentaires

- On remarque que, contrairement au cas où le champ magnétique possède deux limites asymptotiques de même signe, ici on n'a plus la monotonie au moins pour la branche spectrale correspondant à l'état fondamental.
- La source des difficultés pour le cas $k > 0$ peut se voir déjà dans le cas d'un champ magnétique comme celui supposé par l'hypothèse (B). En effet lorsque $k < 0$ le potentiel V_k est un puits de potentiel parabolique déformé, par contre, pour $k > 0$ on a un double puits non symétrique; on voit donc que les deux problèmes unidimensionnels sont entièrement différents et que le deuxième problème est plus compliqué.

- Dans la preuve de la stabilité du spectre continu, sous l'effet des impuretés, on utilise le fait que la dérivée des branches spectrales est positive (ou, plus généralement, a un signe constant). Ici cette méthode pourrait s'appliquer seulement sous certaines conditions (déjà exposées à la fin du chapitre 5): croisements dans des intervalles sur lesquels les branches croisées sont strictement monotones.

Bibliographie

- [1] W.O. Amrein, *Théorie des Groupes pour la Physique*, notes de cours, Université de Genève, 1998
- [2] S.D. Chatterji, *Cours d'Analyse: 3. Equations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles*, PPUR, Lausanne, 1998
- [3] H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsch, B. Simon, *Schrödinger Operators with Applications to Quantum Mechanics and Global Geometry*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1987
- [4] J. Fröhlich and U.M. Studer, *Gauge invariance and current algebra in nonrelativistic many-body theory*, Secs. IV.E and VI.A, Rev. Mod. Phys. **65** (1993), 733-802
- [5] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Product*, Corrected and enlarged edition, Academic Press, New York, 1980
- [6] B.I. Halperin, *Quantized Hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential*, Phys. Rev. B **25** (1982), 2185-2190
- [7] A. Iwatsuka, *Examples of Absolutely Continuous Schrödinger Operators in Magnetic Fields*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **21** (1985), 385-401
- [8] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966
- [9] H. Kunz et B. Souillard, *Sur le spectre des opérateurs aux différences finies aléatoires*, Commun. Math. Phys. **78** (1980), 201-246
- [10] R.B. Laughlin, *Quantized Hall conductivity in two dimensions*, Phys. Rev. B **23** (1981), 5632-5633
- [11] I.M. Lifshits, S.A. Gredeskul, L.A. Pastur, *Introduction to the theory of disordered systems*, John Wiley & Sons, New York, 1988
- [12] N. Macris, P.A. Martin and J.V. Pulé, *On Edge States In Semi-Infinite Quantum Hall Systems*, à paraître dans J. Phys. A: Math. Gen.

- [13] M. Măntoiu, R. Purice, *Some Propagation Properties of the Iwatsuka Model*, Commun. Math. Phys. **188** (1997), 691-708
- [14] R.E. Prange, S.M. Girvin, *The Quantum Hall Effect*, Graduate Texts in Contemporary Physics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1987
- [15] M. Reed and B. Simon, *I. Functional Analysis*, Revised and enlarged edition, Academic Press, New York, 1980
- [16] M. Reed and B. Simon, *II. Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, New York, 1975
- [17] M. Reed and B. Simon, *IV. Analysis of Operators*, Academic Press, New York, 1978
- [18] D. Ruelle, *A Remark on Bound States in Potential-Scattering Theory*, Nuovo Cimento A **61** (1969), 655-662
- [19] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, New York, 1979
- [20] J. Walcher, *Anwendug positiver Kommutatoren auf den Quanten-Hall-Effekt*, Travail de diplôme, ETHZ, 1998

Remerciements

Je tiens ici à remercier tout d'abord mes parents pour le soutien sans faille qu'ils ont su me donner tout au long de mes études. Sans la confiance en moi-même, et en mes moyens, qu'ils ont su me transmettre, je doute que j'aurais aujourd'hui écrit ces lignes. Donc un grand MERCI.

Je ne peux pas oublier de remercier mon frère Patrik pour son aide, qui passe de l'"informatique" aux intéressantes discussions concernant la Physique et le travail que je viens de terminer.

Je remercie aussi le reste de la famille qui m'a aidé moralement à parcourir cette route vers la connaissance.

C'est aux personnes que je viens de citer qu'est dédié ce travail.

Passons maintenant au "domaine académique".

Je remercie vivement le Professeur Philippe Martin, ainsi que le Docteur Nicolas Macris, pour leur grande disponibilité. J'ai passé de nombreuses heures à discuter avec eux, et ils ont toujours montré de l'attention pour mes problèmes en montrant une grande sensibilité, qualité que j'ai beaucoup appréciée.

Les longues, et agréables, discussions qu'on a eu ont sûrement contribué à une amélioration de ce travail.

Il faut aussi que je les remercie pour la connaissance transmise au cours de ce travail, et j'estime avoir beaucoup appris pendant ces quatre mois de recherche.

Il ne faut surtout pas oublier mes collègues de bureau, Ky-Thuan Bach et Bernd Braunecker. Je les remercie pour l'excellente ambiance de travail qui s'est créée entre nous, et pour avoir écouté à plusieurs reprises mes questions "au tableau noir"; ainsi que, pour avoir lu la version préliminaire de ce travail, d'une part en corrigeant le texte, d'autre part en me signalant les parties techniques à expliquer de façon plus claire.

Enfin je remercie mon assistant d'analyse Yves Bolle, et tous les autres collègues qui ont lu des parties de ce rapport et avec lesquels j'ai pu avoir

des intéressantes discussions.