Physique quantique au lycée

Concepts de base: polarisation du photon et autres systèmes à deux niveaux

Christian Ferrari et Valerio Scarani

Cours de formation CRP/CPS

Champéry, 21 septembre 2011

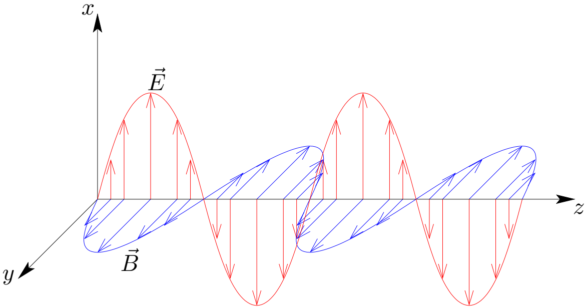
Plan de l'exposé

- La polarisation de la lumière et du photon
- D'autres systèmes à deux niveaux
- L'évolution des états
- L'intrication
- Références

BUT: présentation simplifiée des concepts fondamentaux de la physique quantique.

La polarisation de la lumière

- La lumière consiste en un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$ orthogonaux, qui oscillent dans une direction perpendiculaire à la direction de propagation.



- La **polarisation de la lumière** décrit la direction d'oscillation du champ électrique.

Notation vectorielle pour la polarisation linéaire

- Correspondance 1-2: direction $\leftrightarrow$ vecteur.
- Donc: possibilité de **décrire la polarisation avec un vecteur** $\vec{e}$ de $\mathbb{R}^2$. Mais attention $\vec{e}$ et $-\vec{e}$ décrivent la même polarisation.
- Deux polarisations orthogonales: H et V, associées aux vecteurs orthogonaux $\vec{e}_H$ et $\vec{e}_V$. $\{\vec{e}_H, \vec{e}_V\}$ base de $\mathbb{R}^2$.
- La polarisation d'angle α par rapport à $\vec{e}_H$ est décrite par

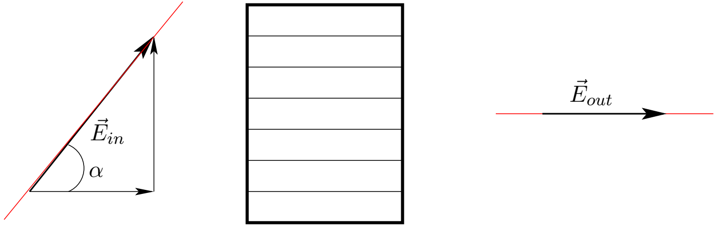
$$\vec{e}_\alpha = \cos(\alpha)\vec{e}_H + \sin(\alpha)\vec{e}_V \ ,$$

et la polarisation orthogonale est décrite par

$$\vec{e}_{\alpha^\perp} = -\sin(\alpha)\vec{e}_H + \cos(\alpha)\vec{e}_V \ .$$

Le polarisateur

- Un **polarisateur** est un matériau qui, grâce a sa structure cristalline, possède un axe préféré.
- Le polarisateur agit comme un filtre, vu que la polarisation est décrite par un vecteur, il transmet la composante parallèle à son axe et absorbe ou reflète celle qui en est perpendiculaire. Seulement une partie de la lumière est transmise.



- Un polarisateur permet de **mesurer la polarisation** dans une direction donnée (et dans la direction perpendiculaire).

Intensité trasmise et réfléchie

Polarisateur d'axe horizontal.

- Lumière incidente d'intensité I et polarisation d'angle α depuis l'horizontale.
- Lumière réfléchie ou absorbé d'intensité I_R et polarisation verticale.
- Lumière transmise d'intensité I_T et polarisation horizontale.
- Conservation de l'énergie

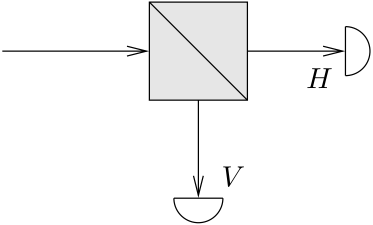
$$I = I_R + I_T$$

- $I_T \propto I$ et $I_R \propto I$ et

$$I_R = I \sin^2(\alpha) \qquad\qquad I_T = I \cos^2(\alpha)$$

Polarizing beam splitter

- Un **polarizing beam splitter** est un matériau qui permet de séparer un faisceau de lumière selon sa polarisation.
- La polarisation H est transmise et la polarisation V est réfléchie.



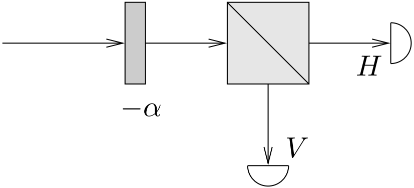
- Pour **mesurer la polarisation** de la lumière selon les deux directions H et V on peux donc utiliser un polarizing beam splitter.

Polarizing beam splitter et rotateur de polarisation

- Un **rotateur de polarisation** est un matériau qui permet de tourner la polarisation d'un faisceau de lumière d'un angle $-\alpha$, de telle manière que:

$$\vec{e}_\alpha \to \vec{e}_H \qquad\qquad \vec{e}_{\alpha^\perp} \to \vec{e}_V$$

- La séparation d'un faisceau avec lumière de polarisation α et $\alpha^\perp$ est obtenue comme suit:



- Lumière transmise: initialement avec polarisation α; Lumière réfléchie: initialement avec polarisation $\alpha^\perp$.

La polarisation du photon

- Einstein 1905: la lumière est composée de "particules" appelées photons.
- Une des propriétés du photon est la **polarisation du photon**.
- En particulier: un faisceau de lumière polarisé est composé de photons *tous* avec la même polarisation.
- Faisceau de lumière avec polarisation

$$\vec{e}_\alpha = \cos(\alpha)\vec{e}_H + \sin(\alpha)\vec{e}_V$$

état de polarisation d'un photon du faisceau

$$|\alpha\rangle = \cos(\alpha)|H\rangle + \sin(\alpha)|V\rangle \ .$$

Quelques détails sur les états de polarisation

- $|H\rangle$ et $|V\rangle$ décrivent les états de polarisation H et V du photon, ce sont des **vecteurs** de l'**espace vectoriel** $\mathcal{H}$ **des états de polarisation**.
- $|\alpha\rangle$ est une combinaison linéaire (**états de superposition**) des états (ou vecteurs) $|H\rangle$ et $|V\rangle$.
- Plus en détails

$$|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |V\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

- On vérifie les **produits scalaires** suivants:

$$\langle H|\alpha\rangle = \cos(\alpha) \quad \langle V|\alpha\rangle = \sin(\alpha)$$

  et $\langle H|H\rangle = \langle V|V\rangle = 1$, $\langle H|V\rangle = 0$.
- $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ est une **base** de $\mathcal{H}$ (notée base H/V).

Les probabilités et la règle de Born

- Polarisateur H: lumière incidente d'intensité I et lumière transmise d'intensité $I_T = I\cos^2(\alpha)$.
- Le photon est indivisible: soit il est transmis, soit il est réfléchi $\Rightarrow \cos^2(\alpha)$ est la *probabilité* de transmission.
- **Après la mesure** avec le polarisateur o le polarizing beam splitter: état $|H\rangle$ si transmis, état $|V\rangle$ si réfléchi.
- **Règle de Born**: état de polarisation du photon (avant la mesure)

$$|\alpha\rangle = \cos(\alpha)|H\rangle + \sin(\alpha)|V\rangle$$

$$\begin{aligned} P(\text{de trouver } |H\rangle \text{ donné } |\alpha\rangle) &= \cos^2(\alpha) = |\langle H|\alpha\rangle|^2 \\ P(\text{de trouver } |V\rangle \text{ donné } |\alpha\rangle) &= \sin^2(\alpha) = |\langle V|\alpha\rangle|^2 \end{aligned}$$

Un exemple

- Une autre base utile (notée base $+/-$) est définie par

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|H\rangle + |V\rangle\big) \\ |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|H\rangle - |V\rangle\big) \end{aligned}$$

- La mesure sur un photon dans l'état $|\pm\rangle$ par rapport à la base H/V est

$$\begin{aligned} P(\text{de trouver } |H\rangle \text{ donné } |\pm\rangle) &= |\langle H|\pm\rangle|^2 = \frac{1}{2} \\ P(\text{de trouver } |V\rangle \text{ donné } |\pm\rangle) &= |\langle V|\pm\rangle|^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Remarques importantes

- L'état de superposition $|\alpha\rangle = \cos(\alpha)|H\rangle + \sin(\alpha)|V\rangle$ décrit un seul photon. Ceci ne signifie pas qu'une partie des photons est polarisée $|H\rangle$ et l'autre $|V\rangle$.
- $|\alpha\rangle$ décrit un photon qui, s'il est mesuré dans la base H/V, a une probabilité $\cos^2(\alpha)$ d'être transmis avec polarisation H et une probabilité $\sin^2(\alpha)$ d'être transmis avec polarisation V.
- Bien que l'on connaisse le comportement statistique de l'ensemble des photons, **il n'est pas possible de prévoir avec certitude le résultat de la mesure sur un seul photon**.
- Il n'y a pas de mécanisme caché: c'est le **caractère aléatoire de la Nature microscopique**.

Autres systèmes à deux niveaux

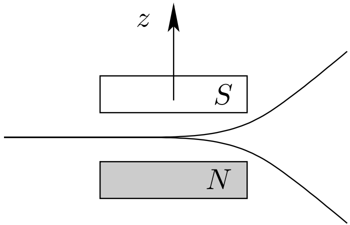
- La polarisation du photon exhibe **deux** états orthogonaux (deux états pour chaque base), par exemple

$$|H\rangle \text{ et } |V\rangle \qquad \text{ou} \qquad |+\rangle \text{ et } |-\rangle$$

- Il existe d'autres systèmes physiques qui peuvent être caractérisés par **deux** états orthogonaux:
  - le **spin**, propriété intrinsèque de toute particule;
  - une **particule qui se propage dans certains interféromètres** avec que deux directions possibles;
  - des "**atomes à deux niveaux**";
  - ....
- Tous ces systèmes sont appelés **systèmes à deux niveaux**.

L'aimant de Stern-Gerlach

- Un **aimant de Stern-Gerlach** est un aimant avec un fort gradient de champ magnétique dans une direction.
- Les particules avec spin $\frac{1}{2}$ sont déviées dans deux directions



- Pour **mesurer le spin** selon une direction donnée, on peut utiliser un aimant de Stern-Gerlach.

Le spin

- Gradient de champ dans la direction z: états de spin $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$, si dans la direction x états $|\leftarrow\rangle$ et $|\rightarrow\rangle$, où

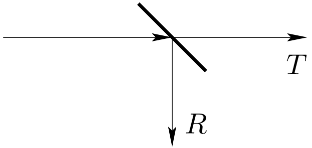
$$
\begin{aligned}
|\leftarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\big)\\
|\rightarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\big)
\end{aligned}
$$

- Avec la **règle de Born** pour les probabilités

$$
\begin{aligned}
P(\text{de trouver } |\uparrow\rangle \text{ donné } |\rightarrow\rangle) &= |\langle\uparrow|\rightarrow\rangle|^2 = \frac{1}{2}\\
P(\text{de trouver } |\downarrow\rangle \text{ donné } |\rightarrow\rangle) &= |\langle\downarrow|\rightarrow\rangle|^2 = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Beam splitter

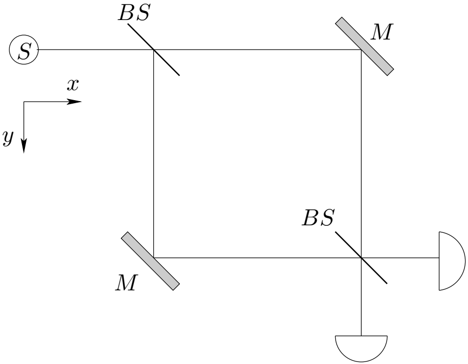
- Un **beam splitter** est un matériau qui permet de séparer un faisceau de lumière ou de "particules": une partie est transmise, une partie est réfléchie dans la direction perpendiculaire.



- Si le faisceau est complètement réfléchi, on parle de miroir.

L'interféromètre de Mach-Zehnder

- L'**interféromètre de Mach-Zehnder** est construit avec des miroirs et des beam splitters



- Notons $|x\rangle$ et $|y\rangle$ les états de propagation dans les directions x et y.

Synthèse (1)

- Tout système à deux niveaux est caractérisé par **deux états orthogonaux**, représentés par des vecteurs

$$|\psi_1\rangle \text{ et } |\psi_2\rangle \qquad \text{ou} \qquad |\varphi_1\rangle \text{ et } |\varphi_2\rangle \qquad \ldots$$

- Toute couple d'états orthogonaux est une base de l'**espace vectoriel** $\mathcal{H}$ (de **dimension 2**) des états du système.
- Tout vecteur $|\xi\rangle$ peux s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de base, il est appelé **état de superposition**,

$$\begin{aligned} |\xi\rangle &= a_1|\psi_1\rangle + a_2|\psi_2\rangle \\ &= b_1|\varphi_1\rangle + b_2|\varphi_2\rangle \\ &= \ldots \end{aligned}$$

- **Tout vecteur représente un état possible du système**.

Synthèse (2)

- Il existe des setup qui permettent de "séparer" les états orthogonaux d'une base $\Rightarrow$ il est possible de **mesurer** les propriétés représentées pas ces états.
- **Après la mesure**, l'état est décrit par le vecteur associé au résultat de la mesure.
- La **probabilité** d'observer un certain résultat est donnée par la **règle de Born**:

$$\begin{aligned} P(\text{de trouver } |\psi_1\rangle \text{ donné } |\xi\rangle) &= |\langle\psi_1|\xi\rangle|^2 \\ P(\text{de trouver } |\psi_2\rangle \text{ donné } |\xi\rangle) &= |\langle\psi_2|\xi\rangle|^2 \end{aligned}$$

et pareillement pour les autre bases.

L'évolution des états

- Toute transformation U qui représente l'évolution d'un état doit satisfaire quelques propriétés fondamentales (**théorème de Wigner**).
- U doit être **linéaire**:

$$U\Big(|\xi_1\rangle + |\xi_2\rangle\Big) = U(|\xi_1\rangle) + U(|\xi_2\rangle)$$

- U doit préserver le produit scalaire (on dit être **unitaire**):

$$\langle U\xi_1|U\xi_2\rangle = \langle \xi_1|\xi_2\rangle$$

- Par exemple un beam splitter agit comme ($i = \sqrt{-1}$)

$$\begin{cases} |x\rangle & \to \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|x\rangle + i|y\rangle\Big) \\ |y\rangle & \to \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|y\rangle + i|x\rangle\Big) \end{cases}$$

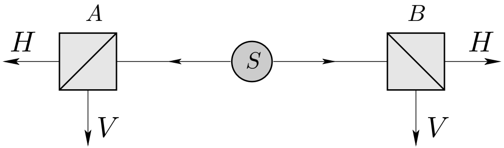
Systèmes composés classiques

- Système A. État ρ_A.
- Système B. État ρ_B.
- Système $A \cup B$. État $\rho_{A\cup B} = (\rho_A, \rho_B)$.
- Si A et B interagissent, l'évolution des états ρ_A et ρ_B dépend des valeurs réciproques respectives.
- **MAIS** à chaque instant l'état $\rho_{A\cup B}$ est bien défini, et de même les états des sous systèmes A et B, c'est à dire les valeurs de ρ_A et ρ_B, sont toujours bien définis.
- A chaque instant, il est possible de caractériser les propriétés des sous systèmes A et B, on dit qu'ils sont **séparables**.

États à deux photons

Considérons un système composé par deux photons.

- Les 4 états de polarisation HH, HV, VH, VV peuvent se vérifier et ils sont **mesurés** avec deux polarizing beam splitters.



- Ces états sont associés aux **quatre vecteurs** notés

$$|H\rangle \otimes |H\rangle \qquad |H\rangle \otimes |V\rangle \qquad |V\rangle \otimes |H\rangle \qquad |V\rangle \otimes |V\rangle$$

- Clairement $|H\rangle \otimes |V\rangle \neq |V\rangle \otimes |H\rangle$.
- Le produit $\otimes$, appelé produit tensoriel, a les propriétés usuelles de la multiplication, mais il est non commutatif.

Forme générale d'un état à deux photons

- Les vecteurs

$$\Big\{|H\rangle \otimes |H\rangle, |H\rangle \otimes |V\rangle, |V\rangle \otimes |H\rangle, |V\rangle \otimes |V\rangle\Big\}$$

forment une **base** de l'espace des états de polarisation à deux photons, un espace vectoriel de dimension 4 avec produit scalaire

$$\langle\psi_1 \otimes \psi_2|\varphi_1 \otimes \varphi_2\rangle = \langle\psi_1|\varphi_1\rangle\langle\psi_2|\varphi_2\rangle \ .$$

- La forme générale d'un état de polarisation à deux photons est une combinaison linéaire (**état de superposition**)

$$|\psi\rangle = a|H\rangle \otimes |H\rangle + b|H\rangle \otimes |V\rangle + c|V\rangle \otimes |H\rangle + d|V\rangle \otimes |V\rangle$$

avec $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$ (condition de normalisation).

Forme générale d'un état à deux photons

- **Exemple 1**:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|H\rangle \otimes |H\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|H\rangle \otimes |V\rangle = |H\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$$

  État où le premier photon a une polarisation $|H\rangle$ et le second $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$.
  $\Rightarrow$ **l'état des single photons est bien défini**.

- **Exemple 2**:

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle \otimes |H\rangle + |V\rangle \otimes |V\rangle)$$

  Il est impossible de factoriser $|\varphi\rangle$
  $\Rightarrow$ **l'état des single photons n'est pas bien défini**.

- **Les états non factorisables sont appelés états entangled ou états intriqués**.

Mesure sur un état intriqué

- Mesure (avec deux polarizing beam splitters) de la polarisation de l'état à deux photons

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle \otimes |H\rangle + |V\rangle \otimes |V\rangle)$$

- On observe que les **résultats** des deux photons sont **corrélés**: soit on obtient $|H\rangle$ pour les deux, soit on obtient $|V\rangle$ pour les deux.
- **MAIS**, dans l'état $|\varphi\rangle$, **chaque single photon n'a pas un état de polarisation bien défini**: seule la propriété du couple de photons "même polarisation" est définie.

Remarques importantes

- Les états intriqués s'étendent à tous les systèmes à deux niveaux: deux spin, deux interféromètres de Mach-Zehnder (= interféromètre de Franson), ...
- Si un système se trouve dans un état intriqué, il est impossible de décrire séparément les deux "particules", elles **doivent être considérées comme une entité unique** (**non séparabilité**).
- Les corrélations ne peuvent pas être expliquées classiquement, mais elles sont de pure origine quantique.
- Les **états intriqués** représentent le **coeur de la physique quantique** et sont à la base de nombreux phénomènes intéressants:
  - Quantum key distribution;
  - Quantum computation;
  - Quantum teleportation;
  - ...

Références

- V. Scarani, L. Chua, S.Y. Liu, **Six Quantum Pieces**, World Scientific (2010)
- V. Scarani, **Initiation à la physique quantique**, Vuibert (2003, 3e ed. 2006)