

Corso di aggiornamento interno Gruppo di Fisica

Lo spazio-tempo di Minkowski tra fisica e matematica

Christian Ferrari

24 ottobre 2007

Liceo di Locarno

- Problema generale: descrivere gli “eventi” che accadono nell’Universo fisico e analizzare la relazione tra di essi.
- “Evento” = “evento puntuale”, senza estensione spaziale, né durata temporale.
- Esempi:
 - collisione istantanea;
 - un “istante” nella storia di un PM o di un fotone
⇒ sequenza continua di eventi = linea d’universo.
- Matematicamente:
 $\mathcal{M} = \{Eventi\}$ (come insieme) che verrà munito di una **struttura matematica compatibile con le esigenze della fisica.**

L'esperienza mostra che:

- **spazio**: continuo tridimensionale euclideo;
- **tempo**: continuo unidimensionale orientato.

Quindi ogni osservatore è munito di:

- un sistema di coordinate spaziali cartesiane, così da associare ad un evento (x_1, x_2, x_3) ;
- un orologio che scandisce un ordine temporale sulla sua linea d'universo, così da associare ad un evento $t \leftrightarrow x_0 = ct$ dove $[c] = [L]/[T]$ da definire.

⇒ Problema: sincronizzazione!

La relatività ristretta si basa sugli **assiomi** seguenti:

- 1 vale un principio di relatività per tutta la fisica;
- 2 la luce, *nel vuoto*, si muove in linea retta con una velocità indipendente dalla direzione (isotropia), dalla frequenza e dalla velocità della sua sorgente;

così come formulati da Einstein nel 1905:

"[...] Esempi di questo tipo [elettrodinamica], uniti ai tentativi falliti di rilevare un qualche movimento della Terra rispetto al "mezzo luminifero", portano a ipotizzare che anche i fenomeni elettrodinamici, come quelli meccanici, non possiedano proprietà corrispondenti al concetto di quiete assoluta. [...] **le stesse leggi dell'elettrodinamica e dell'ottica saranno valide per tutti i sistemi di coordinate nei quali valgono le equazioni della meccanica.**

Eleveremo questa congettura (il cui contenuto, d'ora in poi, sarà chiamato "principio di relatività") al rango di postulato; introdurremo, inoltre, un altro postulato, solo all'apparenza incompatibile con il precedente, cioè che la luce nello spazio vuoto si propaghi sempre con una velocità determinata, c , indipendente dallo stato di moto del corpo che la emette. Questi due postulati sono sufficienti per giungere a una teoria elettrodinamica dei corpi in movimento semplice e coerente, basata sulla teoria di Maxwell per i corpi in quiete. [...]"

Osservazioni

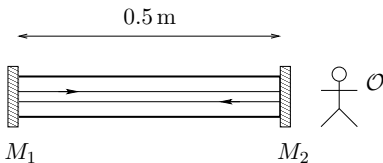
- Un **sistema di riferimento** \mathcal{R} è **inerziale (SRI)**, se relativamente ad esso vale il principio d'inerzia.
- L'assioma 2 è equivalente a:
 - 2bis La luce, *nel vuoto*, si muove in linea retta con una velocità indipendente dalla direzione (isotropia) e dalla frequenza, ed ha lo stesso valore c in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Verifiche sperimentali del secondo assioma:

- 2bis \rightarrow Kennedy–Thorndike (1932), esperimento di Michelson–Morley (1881 e 1887) modificato;
- 2 \rightarrow CERN (1964), tempo di volo dei fotoni ottenuti da $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$

$$c_{moto} = c + kv_{\pi^0} \quad k = (0 \pm 1.3) \cdot 10^{-4} .$$

Il tempo dell'osservatore è determinato tramite il **tubo di luce**



Una riflessione corrisponde a

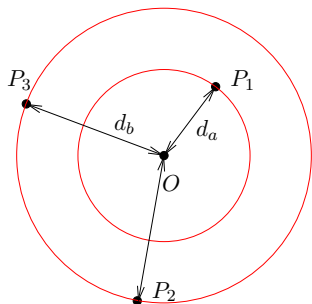
$$\Delta t = \frac{1 \text{ m}}{c} = \frac{1}{3 \cdot 10^8} \text{ s}$$

e definisce un "secondo" x_0 dove x_0 è definito da

$$x_0 = ct .$$

Processo di sincronizzazione in \mathcal{R} :

- in ogni punto P di \mathcal{R} poniamo un orologio identico a quello dell'osservatore posto all'origine O ;
- al tempo x_0 in O è emessa un'onda EM (luce) sferica;
- quando il fronte d'onda arriva in P l'orologio in P è regolato a $x_0 + \text{dist}(O, P)$.



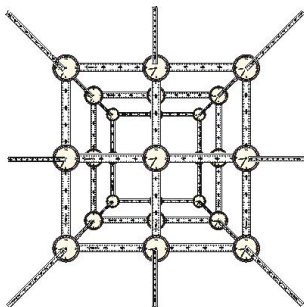
$$\begin{aligned}x_0^{P_1} &= x_0^O + d_a \\x_0^{P_2} &= x_0^O + d_b \\x_0^{P_3} &= x_0^O + d_b .\end{aligned}$$

Relativamente ad \mathcal{R} abbiamo quindi una parametrizzazione degli eventi con

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) .$$

Possiamo identificare

$$\mathcal{M} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^4 .$$



Siano:

- \mathcal{R} un SRI, gli eventi relativamente ad \mathcal{R} sono parametrizzati da

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3) ;$$

- \mathcal{R}' un SRI, gli eventi relativamente ad \mathcal{R}' sono parametrizzati da

$$x' = (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) .$$

Problema:

Dato un evento E , come sono legate le coordinate x e x' di E ?

Ossia come determinare la trasformazione

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ x &\longmapsto x' = L(x) \quad ? \end{aligned}$$

La trasformazione L deve soddisfare le seguenti proprietà:

- 1 trasformare rette in rette: un MRU relativamente ad \mathcal{R} deve essere un MRU relativamente ad \mathcal{R}' , poiché \mathcal{R} e \mathcal{R}' sono SRI;
- 2 preservare la propagazione della luce (assioma 2): per due eventi A e B collegati da un raggio di luce si deve avere

$$c(t^B - t^A) = \sqrt{(x_1^B - x_1^A)^2 + (x_2^B - x_2^A)^2 + (x_3^B - x_3^A)^2},$$

ma anche

$$c(t'^B - t'^A) = \sqrt{(x_1'^B - x_1'^A)^2 + (x_2'^B - x_2'^A)^2 + (x_3'^B - x_3'^A)^2}.$$

Dati due eventi A e B definiamo l'**intervallo spazio-temporale** tra A e B :

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= -c^2(t^B - t^A)^2 + (x_1^B - x_1^A)^2 + (x_2^B - x_2^A)^2 + (x_3^B - x_3^A)^2 \\ \Delta s'^2 &= -c^2(t'^B - t'^A)^2 + (x_1'^B - x_1'^A)^2 + (x_2'^B - x_2'^A)^2 + (x_3'^B - x_3'^A)^2\end{aligned}$$

e si constata che per due eventi collegati da un raggio di luce

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2 = 0 .$$

Come vedremo Δs^2 è un **invariante**, ossia per ogni A e B

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2 .$$

La condizione 1 impone ad L di essere una trasformazione **lineare**, ossia

$$x'_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3$$

$$x'_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$x'_2 = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$x'_3 = a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 .$$

Da ciò, usando le **ipotesi fisiche** dell'**omogeneità** e dell'**isotropia dello spazio** e dell'**omogeneità del tempo** segue che

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2 .$$

↪ Esercizio

⇒ La trasformazione L è lineare e preserva l'intervallo Δs^2 .

Sia V un \mathbb{R} -spazio vettoriale.

- Una **forma bilineare**

$$\begin{aligned}\beta : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \beta(x, y)\end{aligned}$$

è un'applicazione che soddisfa

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \quad \beta(\lambda x + y, z) &= \lambda\beta(x, z) + \beta(y, z) && \forall x, y, z \in V, \lambda \in \mathbb{R} \\ \textcircled{2} \quad \beta(x, \lambda y + z) &= \lambda\beta(x, y) + \beta(x, z) && \forall x, y, z \in V, \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

- β è detta **simmetrica** se

$$\beta(x, y) = \beta(y, x) \quad \forall x, y \in V.$$

- β è detta **non degenera** se

$$\beta(x, y) = 0 \quad \forall x \in V \implies y = 0.$$

- β è detta **definita positiva** se

$$\beta(y, y) > 0 \quad \forall y \in V \setminus \{0\}.$$

Sia $V = \mathbb{R}^n$. Rispetto alla base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$ la forma bilineare β è rappresentata dalla matrice B di elementi $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$ e si ha

$$\beta(x, y) = {}^t x B y = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} .$$

Sia β una forma bilineare simmetrica. Due **vettori** $x, y \in V$ sono detti **β -ortogonali** se

$$\beta(x, y) = 0 .$$

La **forma quadratica** indotta dalla forma bilineare β è l'applicazione definita da

$$\begin{aligned}q_{\beta} : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto q_{\beta}(y) = \beta(y, y) .\end{aligned}$$

Se β è simmetrica e non degenere, il numero r di vettori e_i in ogni base β -ortonormale (che esiste!) con $q_{\beta}(e_i) = -1$ è chiamato **indice** di β .

Per definizione, i vettori β -ortonormati sono caratterizzati da $q_{\beta}(e_i) = \pm 1$.

Lo **spazio-tempo di Minkowski** è lo spazio $\mathcal{M} = \mathbb{R}^4$ munito della struttura di spazio vettoriale reale sul quale è definita una forma bilineare simmetrica non degenere η di indice 1.

Rispetto alla base canonica $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ di \mathbb{R}^4 la forma bilineare è data da

$$\begin{aligned} \eta : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (y, z) &\longmapsto \eta(y, z) = -y_0z_0 + \sum_{i=1}^3 y_i z_i . \end{aligned}$$

La matrice di η rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^4 , che è una base η -ortogonale, è

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Consideriamo due eventi A e B parametrizzati da

$$(x_0^A, x_1^A, x_2^A, x_3^A) \in \mathcal{M} \quad \text{e} \quad (x_0^B, x_1^B, x_2^B, x_3^B) \in \mathcal{M}$$

possiamo definire

$$\begin{pmatrix} x_0^B - x_0^A \\ x_1^B - x_1^A \\ x_2^B - x_2^A \\ x_3^B - x_3^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \Delta x \in \mathcal{M}$$

Abbiamo

$$q_\eta(\Delta x) = \eta(\Delta x, \Delta x) = -\Delta x_0^2 + \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 = \Delta s^2$$

ciò motiva l'introduzione della forma bilineare η sullo spazio-tempo della relatività ristretta.

Avendo constatato che $q_\eta(\Delta x) = \Delta s^2$ e avendo imposto ad L la condizione $\Delta s^2 = \Delta s'^2$, abbiamo: L **deve preservare la forma bilineare** η , ossia

$$\eta(y', z') = \eta(Ly, Lz) = \eta(y, z) \quad \forall y, z \in \mathcal{M} .$$

Quindi, utilizzando la notazione matriciale,

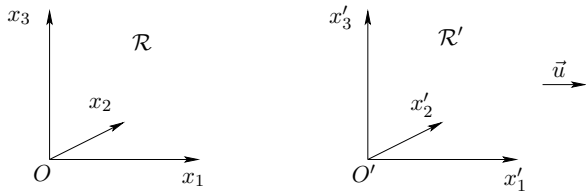
$${}^t y' \eta z' = {}^t (Ly) \eta (Lz) = {}^t y {}^t L \eta L z = {}^t y \eta z$$

ossia si deve avere

$${}^t L \eta L = \eta .$$

Le matrici che soddisfano questa condizione sono chiamate **trasformazioni di Lorentz**.

Un caso particolare di trasformazioni di Lorentz sono i **boosts nella direzione 1**, ossia le trasformazioni in cui \mathcal{R}' è in traslazione rispetto a \mathcal{R} di velocità \vec{u} nella direzione 1.



Si ottiene

$$L(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \beta = \frac{u}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

↪ Esercizio

$\mathcal{L}_1 = \{L(\vec{u}) : \vec{u} = u_1 \vec{e}_1\}$ munito della legge di composizione \circ data dalla moltiplicazione delle matrici è un **gruppo** se

$$u_3 = \frac{u_1 + u_2}{1 + u_1 u_2 / c^2} ,$$

- associatività: segue dalle proprietà delle matrici;
- elemento inverso: $L^{-1}(\vec{u}) = L(-\vec{u})$;
- elemento neutro: $L(\vec{0}) = I$.

↪ Esercizio

\mathcal{L}_1 è un sottogruppo del **gruppo di Lorentz**

$$\mathcal{L} = \{L \in GL_4(\mathbb{R}) : {}^t L \eta L = \eta\} = O(1, 3) .$$

Poniamo $\tanh \eta = \frac{u}{c}$ e scriviamo $L(\vec{u}) = L(\eta)$, tale che

$$L(\eta) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta & 0 & 0 \\ -\sinh \eta & \cosh \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

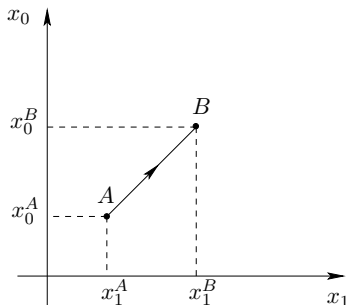
Si ha

$$L(\eta_1) \circ L(\eta_2) = L(\eta_1 + \eta_2) .$$

Ponendo $\frac{u_3}{c} = \tanh \eta_3 = \tanh(\eta_1 + \eta_2)$, si ha

$$\tanh \eta_3 = \frac{\tanh \eta_1 + \tanh \eta_2}{1 + \tanh \eta_1 \tanh \eta_2} \implies u_3 = \frac{u_1 + u_2}{1 + u_1 u_2 / c^2}$$

Per ogni osservatore si ha una **carta** di \mathcal{M} (in $1+1$ dimensioni), chiamata **diagramma di Minkowski**



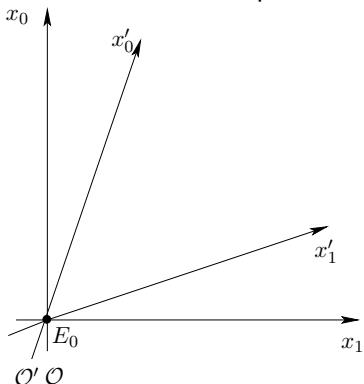
La **linea d'universo della luce** è data da

$$x_0 = \pm x_1$$

ossia una retta di pendenza ± 1 .

Attenzione: la scelta degli assi x_0 e x_1 perpendicolari non ha significato fisico, e non va confusa con l'ortogonalità in \mathcal{M} .

È utile rappresentare la carta di \mathcal{R}' su quella di \mathcal{R}



dove si utilizza:

- la linea d'universo di \mathcal{O}' è $x_1 = ut = \frac{u}{c}x_0 \implies x_0 = \frac{c}{u}x_1$;
- la linea d'universo della luce è $x'_0 = \pm x'_1$.

- I due vettori che definiscono gli assi (x'_0, x'_1) nel diagramma di Minkowski di un osservatore inerziale in \mathcal{R}' sono

$$e'_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e definiscono una base η -ortogonale di \mathcal{M} .

- I vettori $L^{-1}e'_0, L^{-1}e'_1$ definiscono gli assi (x_0, x_1) nel diagramma di Minkowski di \mathcal{R} , essi sono dati da

$$L^{-1}e'_0 = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma\beta \end{pmatrix} \quad L^{-1}e'_1 = \begin{pmatrix} \gamma\beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

e definiscono le rette di equazione (scegliamo l'origine in 0)

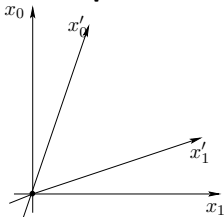
$$x_0 = \frac{1}{\beta}x_1 \quad (\text{per } L^{-1}e'_0)$$

$$x_0 = \beta x_1 \quad (\text{per } L^{-1}e'_1)$$

- I vettori $L^{-1}e'_0$ ed $L^{-1}e'_1$ sono η -ortogonali, infatti

$$\eta(L^{-1}e'_0, L^{-1}e'_1) = -\gamma(\beta\gamma) + (\beta\gamma)\gamma = 0 .$$

Gli assi (x'_0, x'_1) non appaiono ortogonali nella geometria della pagina stampata, infatti essa è la geometria euclidea del piano e l'ortogonalità è data dal prodotto scalare dello spazio euclideo \mathbb{R}^2 . **Essi sono ortogonali relativamente alla forma bilineare η che definisce la geometria dello spazio-tempo di Minkowski.**



Nel diagramma di Minkowski le unità sugli assi x_α e x'_α differiscono!

Per calibrare gli assi (x_1, x_0) e (x'_1, x'_0) si utilizza l'invarianza dell'intervallo Δs^2 relativamente all'evento origine (in 1+1 dim.)

$$\Delta s^2 = -x_0^2 + x_1^2 = -x_0'^2 + x_1'^2 = \Delta s'^2$$

- Rispetto ad \mathcal{R} l'unità su x_0 corrisponde al vettore $x = (1, 0)$, quella su x_1 al vettore $x = (0, 1)$, da cui

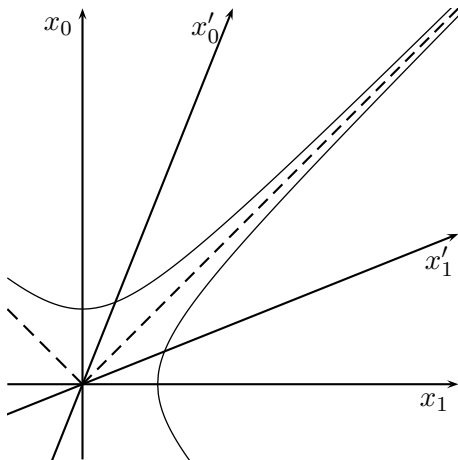
$$-1 = -x_0'^2 + x_1'^2 \quad \text{e} \quad 1 = -x_0'^2 + x_1'^2$$

- Rispetto ad \mathcal{R}' l'unità su x'_0 corrisponde al vettore $x' = (1, 0)$, quella su x'_1 al vettore $x' = (0, 1)$ da cui

$$-1 = -x_0^2 + x_1^2 \quad \text{e} \quad 1 = -x_0^2 + x_1^2$$

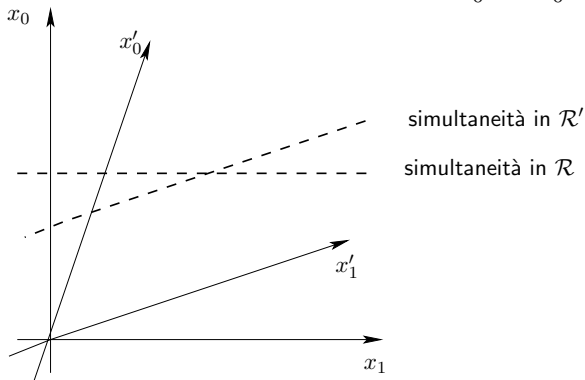
- Sulla carta di \mathcal{R} le unità di x'_0 e x'_1 sono quindi poste sulle iperboli di equazione

$$-1 = -x_0^2 + x_1^2 \quad \text{e} \quad 1 = -x_0^2 + x_1^2$$



Due eventi A e B sono simultanei rispetto ad \mathcal{R} se $x_0^A = x_0^B$.

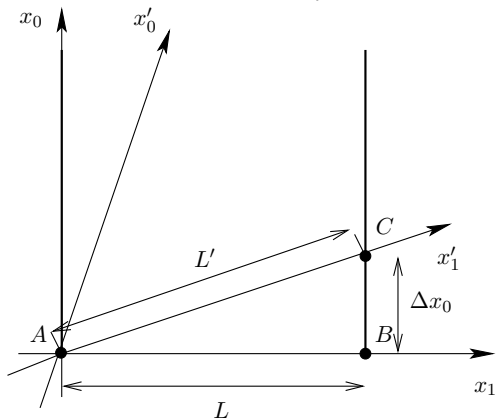
Due eventi A e B sono simultanei rispetto ad \mathcal{R}' se $x_0'^A = x_0'^B$.



La simultaneità non è un concetto assoluto!

Sia \mathcal{L} una riga che rispetto a \mathcal{R} è lunga L . Quanto vale la lunghezza di \mathcal{L} rispetto a \mathcal{R}' ?

La misura della lunghezza corrisponde a comparare le posizioni delle due estremità allo *stesso istante* (ossia simultaneamente)!



Eventi simultanei:

- rispetto a \mathcal{R} : A e B $\implies \Delta s_{AB}^2 = L^2$;
- rispetto a \mathcal{R}' : A e C

$$\implies \Delta s_{AC}^{\prime 2} = L'^2 = \Delta s_{AC}^2 = -\Delta x_0^2 + L^2$$

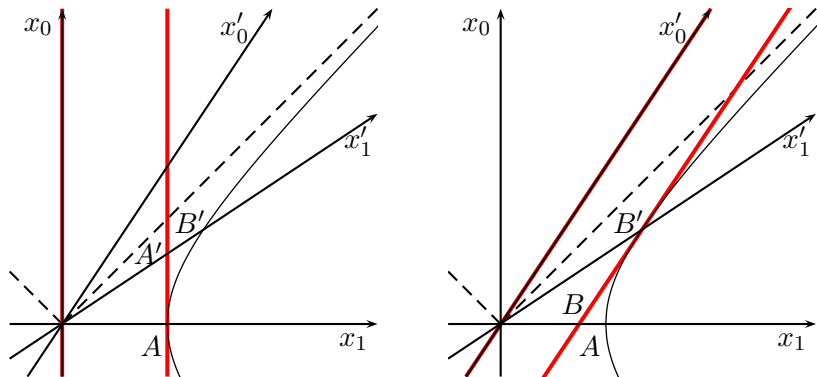
Dalle TdL abbiamo

$$0 = \Delta x_0' = \gamma(\Delta x_0 - \beta L) \implies \Delta x_0 = \beta L$$

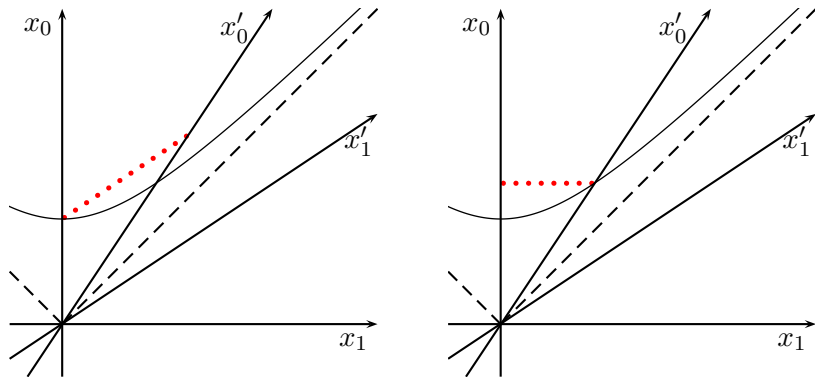
da cui

$$L' = \sqrt{1 - \beta^2} L < L$$

Per un osservatore in moto la riga risulta essere più corta.
La geometria dello spazio-tempo non è euclidea e si basa sulla forma bilineare η !



La riga è più **corta** rispetto al sistema di riferimento in cui è in moto.



L'intervallo di tempo è più **lungo** rispetto al sistema di riferimento in cui l'orologio (fissato all'origine) è in moto.

Dato un vettore $y \in \mathcal{M}$ di tipo temporale ($q_\eta(y) < 0$)

$$\tau(y) = \frac{1}{c} \sqrt{-q_\eta(y)} = \frac{1}{c} \sqrt{-\eta(y, y)}$$

definisce la **durata di** y .

Se $y = \Delta x = x^B - x^A$ allora $\tau(x^B - x^A)$ si interpreta fisicamente come il tempo trascorso per un osservatore che per il quale A e B accadono nello stesso luogo, esso è chiamato **tempo proprio dell'osservatore**.

Ogni vettore $x^B - x^A$ definisce una retta nello spazio-tempo di Minkowski della forma

$$\{x^A + s(x^B - x^A) : s \in \mathbb{R}\}$$

che rappresenta un caso particolare di una curva in \mathcal{M} . La durata si calcola per bilinearità (di η).

In generale, data una curva differenziabile $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{M}$ ($I \subset \mathbb{R}$) in \mathcal{M} , il **vettore velocità** associatogli può essere scritto come (rispetto ad una base $\{e_\mu\}$)

$$\alpha'(\lambda) = \sum_{\mu} \frac{dx_{\mu}}{d\lambda} e_{\mu} .$$

Una curva α è detta di tipo temporale se $\alpha'(\lambda)$ è di tipo temporale per ogni λ , ossia $\eta(\alpha'(\lambda), \alpha'(\lambda)) < 0 \forall \lambda$.

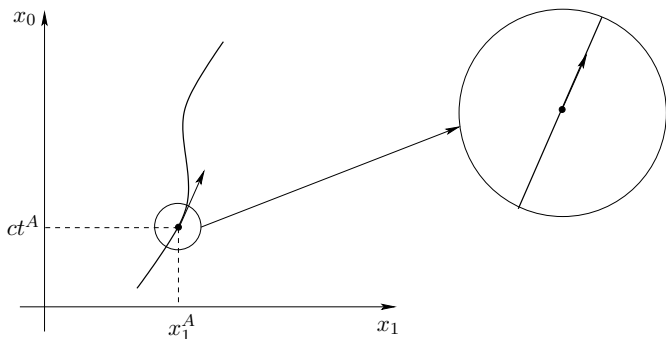
Si definisce la **“lunghezza” temporale** di $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathcal{M}$ come

$$\tau(\alpha) = \frac{1}{c} \int_a^b \sqrt{-\eta(\alpha'(\lambda), \alpha'(\lambda))} d\lambda = \frac{1}{c} \int_a^b \sqrt{-\eta\left(\frac{dx}{d\lambda}, \frac{dx}{d\lambda}\right)} d\lambda .$$

Fisicamente $\tau(\alpha)$ si interpreta come il tempo trascorso tra gli eventi $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ misurato da un orologio associato ad un osservatore la cui linea d'universo è α .

Consideriamo un PM di velocità \vec{v} rispetto ad \mathcal{R} . Il **tempo proprio** τ del PM è il tempo misurato nel sistema di riferimento *istantaneo* \mathcal{R}^* di riposo del PM,

$$c^2 d\tau^2 = -ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \implies d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt .$$



Teorema

Sia $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathcal{M}$ una linea d'universo di tipo temporale tra $\alpha(a) = p$ e $\alpha(b) = q$. Allora

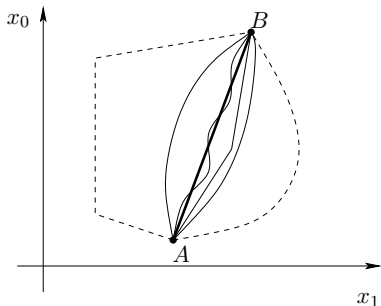
$$\tau(\alpha) \leq \tau(q - p)$$

e si ha ugualianza se e solo se α è la parametrizzazione della retta tra p e q .

\implies Nella geometria dello spazio-tempo di Minkowski la linea retta è la curva di “lunghezza” temporale massima.

Principio del massimo tempo proprio

Tra due punti (due eventi) A ed B nello spazio-tempo, separati da un intervallo di tipo temporale (ossia $\Delta s^2 < 0$), il tempo proprio è *massimo* per delle particelle *libere* (ossia su cui non agiscono forze) e la curva tra A ed B nello spazio-tempo è una *linea retta*.



$$\begin{aligned}\Delta\tau &= \tau_B - \tau_A \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt\end{aligned}$$

Per linee d'universo di tipo temporale

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-\eta(\mathbf{d}x, \mathbf{d}x)} = \frac{1}{c} \sqrt{-q_\eta(\mathbf{d}x)}$$

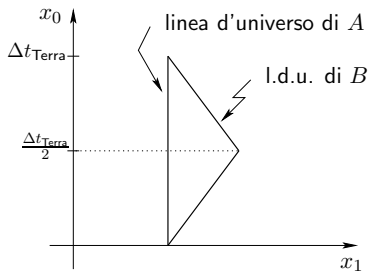
definisce l'**elemento di linea infinitesimale** nello spazio-tempo di Minkowski, sul quale si basa la geometria.

Le rette nello spazio-tempo di Minkowski sono le curve per le quali la “lunghezza” è massima!

L'elemento di linea soddisfa il principio di relatività che gli impone di avere la stessa forma in ogni SRI, poiché la geometria non dipende dal SRI scelto.

- Gemello A : $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}$, quindi $\Delta\tau_A = \Delta t_{\text{Terra}}$;
- Gemello B :
 - $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}'$ di velocità \vec{v} rispetto a \mathcal{R} nella prima 1/2 del viaggio;
 - $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}''$ di velocità $-\vec{v}$ rispetto a \mathcal{R} nella seconda 1/2;

$$\Delta\tau_B = \frac{1}{\gamma(v)} \frac{1}{2} \Delta t_{\text{Terra}} + \frac{1}{\gamma(-v)} \frac{1}{2} \Delta t_{\text{Terra}} = \frac{1}{\gamma(v)} \Delta t_{\text{Terra}} .$$



$$\Delta\tau_A = \gamma \Delta\tau_B$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1$$

$$\implies \Delta\tau_A > \Delta\tau_B .$$

Lo spazio vettoriale \mathbb{R}^3 munito della forma bilineare p

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto p(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^3 x_i y_i \in \mathbb{R}$$

assume la struttura di **spazio euclideo**.

- La forma quadratica associata a p è

$$\mathbb{R}^3 \ni \vec{x} \longmapsto q_p(\vec{x}) = p(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 = \|\vec{x}\|^2 \in \mathbb{R}_+ .$$

- *Lunghezza*: è definita via la norma (o il prodotto scalare)

$$\ell(\vec{x}) = \|\vec{x}\| = \sqrt{q_p(\vec{x})} = \sqrt{p(\vec{x}, \vec{x})} .$$

- *Angolo*: è definito via il prodotto scalare

$$\cos \angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{p(\vec{x}, \vec{y})}{\sqrt{q_p(\vec{x})q_p(\vec{y})}} .$$

- \vec{x} e \vec{y} sono ortogonali se $p(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, e si ha $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \pm\pi/2$.

Lo spazio vettoriale \mathbb{R}^4 munito della forma bilineare η

$$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \ni (y, z) \longmapsto \eta(y, z) = -y_0z_0 + \sum_{i=1}^3 y_i z_i \in \mathbb{R}$$

assume la struttura di **spazio di Minkowski**.

- La forma quadratica associata a η è

$$\mathbb{R}^4 \ni y \longmapsto q_\eta(y) = \eta(y, y) = -y_0^2 + \sum_{i=1}^3 y_i^2 \in \mathbb{R}.$$

- Non è possibile definire una distanza (η non è definita positiva!). Per le linee d'universo di tipo temporale la "distanza" è definita via il tempo proprio $d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-q_\eta(dx)}$.
- y e z sono ortogonali se $\eta(y, z) = 0$, **ma in questo caso non si ha un angolo di $\pi/2$: il concetto di angolo non è definito nello spazio di Minkowski.**

- Dagli assiomi della relatività ristretta si ottiene l'invariante Δs^2 (FIS);
- $\Delta s^2 + \text{SRI} \implies \text{TdL}$ (FIS+MAT);
- TdL: struttura di gruppo (MAT);
- $\Delta s^2 \implies$ forma bilineare η su \mathbb{R}^4 (FIS+MAT);
- η definisce la geometria dello spazio-tempo (MAT);
- geometria dello spazio-tempo \implies descrizione semplice di effetti fisici (MAT+FIS);
- confronto geometria euclidea vs geometria di Minkowski (MAT).

Aspetti matematici trattati in relazione alla relatività ristretta:

- trasformazioni lineari;
- struttura di gruppo;
- funzioni iperboliche;
- forme bilineari e forme quadratiche.

- A. French, *Special Relativity*, Norton (1968)
- C. Gruber, *Mécanique générale*, PPUR (1988)
- J. Hartle, *Gravity. An introduction to Einstein's General Relativity*, Addison-Wesley (2003)
- G. Naber, *The geometry of Minkowski spacetime*, Dover (2004)
- J. Stachel, *L'anno memorabile di Einstein*, Dedalo (2001)