

Le teorie della relatività: un approccio via i principi fondamentali

Christian Ferrari

Liceo di Locarno

Sommario

Presentiamo la costruzione delle teorie della relatività di Galileo e di Einstein sulla base del solo principio di relatività e alcune proprietà della spazio-tempo. La struttura di gruppo, conseguenza del principio di relatività, gioca un ruolo fondamentale nella nostra costruzione.

1 Introduzione

La prima teoria della relatività risale al XVII secolo con i lavori di Galileo Galilei. È importante notare che il termine relatività non si riferisce quindi necessariamente alla teoria di Einstein apparsa nel 1905. L'essenza delle teorie della relatività, essa sia galileiana o einsteiniana, è il cosiddetto principio di relatività che afferma l'identità delle leggi fisiche in ogni sistema di riferimento equivalente.

La scelta dei sistemi di riferimento equivalenti è basata sul *principio d'inezia* di cui diamo la formulazione di Newton "Ciascun corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, salvo che sia costretto a mutare quello stato da forze". Questa legge non enuncia unicamente qualcosa sul moto dei corpi, ma ci definisce pure quali sistemi di riferimento sono ammissibili e possono essere utilizzati per descrivere la meccanica (e poi la fisica in generale). Questi sistemi di riferimento particolari, chiamati *sistemi di riferimento inerziali*, sono tali che rispetto ad essi un corpo sufficientemente lontano da tutti gli altri (sistema isolato) possiede un moto rettilineo ed uniforme.

Le teorie della relatività si occupano quindi della trasformazione delle grandezze fisiche da un sistema di riferimento inerziale \mathcal{R} ad un altro sistema di riferimento inerziale \mathcal{R}' . È naturale cominciare ad analizzare la trasformazione delle coordinate spazio-temporali $(t, x) \rightarrow (t', x')$ di un dato evento¹.

Scopriremo che, compatibilmente al principio di relatività e alle proprietà generali dello spazio-tempo, esistono unicamente due possibili trasformazioni, la prima che porta alla teoria della relatività galileiana, la seconda che porta alla teoria della relatività einsteiniana.

2 Gli assiomi

Per la costruzione di una teoria è necessario esplicitare i fondamenti sulla quale riposa tutto l'edificio teorico. Indipendentemente dall'approccio scelto, generalmente ci si basa sui postulati seguenti.

- (1) Il **principio di relatività**, che stabilisce l'equivalenza dei sistemi di riferimento inerziali per la descrizione delle leggi della Natura.
- (2) L'**omogeneità dello spazio-tempo**, che stabilisce che esso ha le stesse proprietà "ovunque e per sempre"; più precisamente le proprietà di trasformazione degli intervalli spazio-temporali $(\Delta t, \Delta x)$ dipendono unicamente da essi e non dalle loro estremità.
- (3) L'**isotropia dello spazio**, che stabilisce che tutte le direzioni dello spazio sono equivalenti, ossia che tutti gli orientamenti dell'asse del sistema di coordinate sono equivalenti; più precisamente dato l'evento parametrizzato da (t, x) in \mathcal{R} , risp. (t', x') in \mathcal{R}' , allora se la direzione dell'asse spaziale è arbitraria lo stesso evento è parametrizzato in modo equivalente da $(t, -x)$, risp. $(t', -x')$.
- (4) Il **principio di causalità**, che stabilisce un ordine temporale degli eventi; in particolare che l'intervallo temporale Δt abbia lo stesso segno in ogni sistema di riferimento inerziale.

¹Ci limiteremo al caso di una dimensione spaziale.

3 La struttura di gruppo

Il principio di relatività afferma l'esistenza di sistemi di riferimento (fisicamente) equivalenti per la descrizione della Natura. L'equivalenza tra sistemi di riferimento inerziali è una relazione di equivalenza nel senso matematico del termine:

- \mathcal{R} è equivalente a \mathcal{R} : riflessività;
- se \mathcal{R} è equivalente a \mathcal{R}' , allora \mathcal{R}' è equivalente a \mathcal{R} : simmetria;
- se \mathcal{R} è equivalente a \mathcal{R}' e \mathcal{R}' è equivalente a \mathcal{R}'' , allora \mathcal{R} è equivalente a \mathcal{R}'' : transitività.

Sia G l'insieme delle trasformazioni da un sistema di riferimento inerziale ad un altro sistema di riferimento inerziale, e sia \star la legge di composizione su G definita dalla "composizione delle trasformazioni". Allora:

- La legge \star è interna: per ogni $T_1, T_2 \in G$ vale

$$T_2 \star T_1 = T_3 \in G,$$

ossia se T_1 fa corrispondere \mathcal{R} a \mathcal{R}' e T_2 \mathcal{R}' a \mathcal{R}'' , allora T_3 fa corrispondere \mathcal{R} a \mathcal{R}'' . Si ottiene così la transitività.

- Esiste un elemento neutro T_0 tale che per ogni $T \in G$ vale

$$T \star T_0 = T_0 \star T = T,$$

ossia T_0 è la trasformazione che fa corrispondere \mathcal{R} a se stesso. Si ottiene così la riflessività.

- Ogni trasformazione T possiede un inverso, esiste $T^{-1} \in G$ tale che

$$T \star T^{-1} = T^{-1} \star T = T_0,$$

ossia se T fa corrispondere \mathcal{R} a \mathcal{R}' , allora T^{-1} fa corrispondere \mathcal{R}' a \mathcal{R} . Si ottiene così la simmetria.

- La natura associativa della legge \star è automatica poiché si considera un insieme di trasformazioni (e non un insieme qualsiasi) di un insieme dato, ossia un'applicazione tale che $T_1(T_2x) = (T_1 \star T_2)x$.

La necessità di una struttura di gruppo per l'insieme delle trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali non fa altro che tradurre matematicamente il principio di relatività, cioè l'esistenza di sistemi di riferimento inerziali equivalenti.

4 I possibili gruppi compatibili con gli assiomi

Costruiamo ora i possibili gruppi di trasformazione dello spazio-tempo compatibili con le proprietà generali dello spazio-tempo.

Omogeneità dello spazio tempo e gruppi ad un parametro

L'omogeneità dello spazio-tempo implica la linearità della trasformazione

$$(t, x) \rightarrow (t', x'),$$

essa può essere scritta in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\varphi) & b(\varphi) \\ c(\varphi) & d(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = M(\varphi) \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix},$$

dove supponiamo che la trasformazione dipende da un solo parametro [1]. Se notiamo (G, \cdot) il gruppo delle matrici M con il prodotto matriciale come legge di composizione, allora abbiamo la seguente parametrizzazione

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow G \\ \varphi &\longmapsto M(\varphi) \end{aligned}$$

dove I è specificato dal teorema seguente.

Teorema 1.

Ogni gruppo (continuo) ad un parametro è isomorfo a $(\mathbb{R}, +)$ oppure a $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$.

Per il teorema 1 deve valere

$$\begin{cases} M(\varphi + \varphi') &= M(\varphi)M(\varphi') \\ M^{-1}(\varphi) &= M(-\varphi) \\ M(0) &= I_2 \end{cases} .$$

dove ricordiamo che φ può essere un numero reale, nel caso dell'isomorfismo

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}, +) &\longrightarrow (G, \cdot) \\ \varphi &\longmapsto M(\varphi) , \end{aligned}$$

oppure una classe di equivalenza $[a]_{\mathbb{Z}} = \{b \in \mathbb{R} | a - b \in \mathbb{Z}\}$, nel caso dell'isomorfismo²

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +) &\longrightarrow (G, \cdot) \\ \varphi &\longmapsto M(\varphi) . \end{aligned}$$

Ricordiamo che la somma nel gruppo quoziente \mathbb{R}/\mathbb{Z} è definita da $[a]_{\mathbb{Z}} + [b]_{\mathbb{Z}} = [a + b]_{\mathbb{Z}}$.

Isotropia dello spazio

Consideriamo l'**isotropia dello spazio**. Supponiamo che (t, x) e (t', x') siano le coordinate di un evento da due sistemi di riferimento inerziali \mathcal{R} e \mathcal{R}' legati da una trasformazione $M(\varphi)$. Se la direzione dello spazio è invertita, $(t, -x)$ e $(t', -x')$ rappresentano le nuove coordinate e quest'ultime devono essere legate tra loro da una trasformazione $M(\hat{\varphi})$ dove $\hat{\varphi}$ dipende da φ : $\hat{\varphi} = F(\varphi)$. D'altra parte sotto l'inversione dello spazio la trasformazione associata a φ diventa

$$\begin{cases} t' &= a(\varphi)t + b(\varphi)x \\ x' &= c(\varphi)t + d(\varphi)x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t' &= a(\varphi)t + b(\varphi)(-x) \\ -x' &= c(\varphi)t + d(\varphi)(-x) \end{cases}$$

ossia la trasformazione è data dalla matrice

$$\widehat{M}(\varphi) = \begin{pmatrix} a(\varphi) & -b(\varphi) \\ -c(\varphi) & d(\varphi) \end{pmatrix} .$$

Segue quindi

$$\widehat{M}(\varphi) = M(\hat{\varphi}) .$$

Vale

$$M(F(\varphi + \varphi')) = \widehat{M}(\varphi + \varphi') = \widehat{M}(\varphi)\widehat{M}(\varphi') = M(F(\varphi))M(F(\varphi')) = M(F(\varphi) + F(\varphi'))$$

e poiché l'applicazione $\varphi \longrightarrow M(\varphi)$ è biettiva si ottiene

$$F(\varphi + \varphi') = F(\varphi) + F(\varphi') .$$

Quindi F è lineare, ossia (con $\kappa \in \mathbb{R}$):

- caso $(\mathbb{R}, +)$: $F(x) = \kappa x$;
- caso $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$: $F([a]_{\mathbb{Z}}) = [\kappa a]_{\mathbb{Z}}$;

in generale noteremo $F(\varphi) = \kappa\varphi$.

Un'ulteriore inversione dello spazio riporta alla situazione iniziale, quindi

$$F(F(\varphi)) = \varphi$$

e si ha

- caso $(\mathbb{R}, +)$: $x = \kappa^2 x \Leftrightarrow \kappa = \pm 1$;
- caso $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$: $[a]_{\mathbb{Z}} = [\kappa^2 a]_{\mathbb{Z}} \Leftrightarrow a - \kappa^2 a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \kappa = \pm 1$.

Otteniamo infine

$$M(\kappa\varphi) = \widehat{M}(\varphi) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a(\kappa\varphi) & b(\kappa\varphi) \\ c(\kappa\varphi) & d(\kappa\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\varphi) & -b(\varphi) \\ -c(\varphi) & d(\varphi) \end{pmatrix}$$

Si osserva che il caso $\kappa = 1$ implica $b(\varphi) = c(\varphi) = 0$, ossia non vi è nessuna relazione tra spazio e tempo. Scartiamo questa ipotesi.

Abbiamo ottenuto

$$\widehat{M}(\varphi) = M(-\varphi)$$

²In questo caso le funzioni a, b, c, d in M associano ad una classe di equivalenza un numero reale (identico per tutti gli elementi della classe).

e quindi

$$\begin{cases} a(\varphi) &= a(-\varphi) \\ -b(\varphi) &= b(-\varphi) \\ -c(\varphi) &= c(-\varphi) \\ d(\varphi) &= d(-\varphi) \end{cases}$$

Considerando che $\widehat{M}(\varphi) = \det M(\varphi) = \det M(-\varphi) = (\det M(\varphi))^{-1}$ si ottiene la condizione $\det M(\varphi) = \pm 1$ e poiché $\det M(0) = 1$ si ha

$$\det M(\varphi) = 1.$$

Abbiamo quindi, utilizzando $\widehat{M}(\varphi) = M^{-1}(\varphi)$,

$$\begin{pmatrix} a(\varphi) & -b(\varphi) \\ -c(\varphi) & d(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(\varphi) & -b(\varphi) \\ -c(\varphi) & a(\varphi) \end{pmatrix}$$

da cui

$$a(\varphi) = d(\varphi) \quad \text{e} \quad a(\varphi)^2 - b(\varphi)c(\varphi) = 1.$$

Considerando la legge di gruppo $M(\varphi + \varphi') = M(\varphi)M(\varphi')$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} a(\varphi + \varphi') & b(\varphi + \varphi') \\ c(\varphi + \varphi') & a(\varphi + \varphi') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\varphi)a(\varphi') + b(\varphi)c(\varphi') & a(\varphi)b(\varphi') + c(\varphi)a(\varphi') \\ c(\varphi)a(\varphi') + a(\varphi)c(\varphi') & c(\varphi)b(\varphi') + a(\varphi)a(\varphi') \end{pmatrix}$$

da cui

$$a(\varphi + \varphi') = a(\varphi)a(\varphi') + b(\varphi)c(\varphi') = c(\varphi)b(\varphi') + a(\varphi)a(\varphi')$$

e quindi, salvo se una delle due funzioni b o c è nulla,

$$\frac{c(\varphi)}{b(\varphi)} = \frac{c(\varphi')}{b(\varphi')} = \text{costante}$$

le funzioni c e b sono proporzionali.

Con un cambiamento di scala sulla variabile posizione $x \rightarrow \lambda x$ in ogni sistema di riferimento inerziale le equazioni devono restare invariate. Ora,

$$\begin{pmatrix} t' \\ \lambda x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \lambda x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + b\lambda x \\ ct + a\lambda x \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} t' &= at + b\lambda x \\ x' &= \frac{c}{\lambda}t + ax \end{cases}$$

e si osserva che per ottenere le stesse equazioni è necessario porre $b \rightarrow \lambda^{-1}b$ e $c \rightarrow \lambda c$, da cui $c/b \rightarrow \lambda^2 c/b$; è quindi possibile porre $c/b = \pm 1$ (con un cambiamento di scala si ottengono tutti i valori possibili di c/b). Otteniamo 4 casi.

Caso 1: $c = b$, il gruppo di Lorentz

La matrice $M(\varphi)$ è data da

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} a(\varphi) & b(\varphi) \\ b(\varphi) & a(\varphi) \end{pmatrix}$$

e la legge di gruppo implica

$$\begin{cases} a(\varphi + \varphi') &= a(\varphi)a(\varphi') + b(\varphi)b(\varphi') \\ b(\varphi + \varphi') &= a(\varphi)b(\varphi') + b(\varphi)a(\varphi') \end{cases}$$

e, ricordando anche la condizione $\det M(\varphi) = a(\varphi)^2 - b(\varphi)^2 = 1$, otteniamo

$$a(\varphi) = \cosh(\varphi) \quad \text{e} \quad b(\varphi) = \pm \sinh(\varphi).$$

Poiché la funzione \sinh è una biiezione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, il gruppo (G, \cdot) è parametrizzato da \mathbb{R} . Poniamo $\varphi = \eta \in \mathbb{R}$, si ottiene³

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow G \\ \varphi &\longmapsto M(\eta) = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & -\sinh(\eta) \\ -\sinh(\eta) & \cosh(\eta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il gruppo (G, \cdot) è quindi isomorfo a $(\mathbb{R}, +)$.

³Notiamo che avremmo potuto scegliere anche la soluzione $+\sinh(\eta)$, il gruppo è lo stesso poiché $\eta \in \mathbb{R}$ e la matrice $M^{-1}(\eta) = M(-\eta)$ corrisponde esattamente a questa soluzione.

Caso 2: $c = -b$, il gruppo delle rotazioni spazio-temporali

La matrice $M(\varphi)$ è data da

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} a(\varphi) & b(\varphi) \\ -b(\varphi) & a(\varphi) \end{pmatrix}$$

e la legge di gruppo implica

$$\begin{cases} a(\varphi + \varphi') &= a(\varphi)a(\varphi') - b(\varphi)b(\varphi') \\ b(\varphi + \varphi') &= a(\varphi)b(\varphi') + b(\varphi)a(\varphi') \end{cases}$$

e, ricordando anche la condizione $\det M(\varphi) = a(\varphi)^2 + b(\varphi)^2 = 1$, otteniamo

$$a(\varphi) = \cos(\varphi) \quad \text{e} \quad b(\varphi) = \pm \sin(\varphi).$$

Ora le funzioni $\cos(x)$ e $\sin(x)$ sono periodiche di periodo 2π , affinché la parametrizzazione sia unica (ossia l'applicazione $I \rightarrow G$ un isomorfismo di gruppo), è necessario restringere l'argomento delle due funzioni all'intervallo $[0, 2\pi[$ o identificano gli argomenti x e $x + 2\pi$. In modo analogo, scrivendo $\cos(2\pi r)$ e $\sin(2\pi r)$, si ottiene un isomorfismo e restringendo $r \in [0, 1[$ o identificando r a $r + n$, $n \in \mathbb{Z}$. Parametrizzando il gruppo con gli elementi di \mathbb{R}/\mathbb{Z} e ponendo $\varphi = [r]_{\mathbb{Z}}$ otteniamo quindi

$$a([r]_{\mathbb{Z}}) = \cos(2\pi r) \quad \text{e} \quad b([r]_{\mathbb{Z}}) = \pm \sin(2\pi r).$$

Scegliendo⁴ la soluzione $-\sin(2\pi r)$, il gruppo (G, \cdot) è quindi parametrizzato come

$$\begin{aligned} \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\longrightarrow G \\ \varphi &\longmapsto M([r]_{\mathbb{Z}}) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi r) & -\sin(2\pi r) \\ \sin(2\pi r) & \cos(2\pi r) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il gruppo (G, \cdot) è quindi isomorfo a $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$.

Caso 3: $b = 0$, il gruppo di Galileo

Se $b = 0$ allora la proprietà $\det M(\varphi) = 1$ implica $a(\varphi) = \pm 1$ e utilizzando che $a(\varphi + \varphi') = a(\varphi)a(\varphi')$ otteniamo $a(\varphi) = 1$. La matrice $M(\varphi)$ è data da

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c(\varphi) & 1 \end{pmatrix}$$

e la legge di gruppo impone

$$c(\varphi + \varphi') = c(\varphi) + c(\varphi')$$

da cui

$$c(\varphi) = \alpha\varphi$$

e, poiché la funzione lineare $c(\varphi) = \alpha\varphi$ è biettiva, il gruppo (G, \cdot) è parametrizzato da $\varphi \in \mathbb{R}$. Otteniamo

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha\varphi & 1 \end{pmatrix}.$$

Il gruppo (G, \cdot) è quindi isomorfo a $(\mathbb{R}, +)$.

Caso 4: $c = 0$, il gruppo di Carroll

Se $c = 0$ allora la proprietà $\det M(\varphi) = 1$ implica $a(\varphi) = \pm 1$ e utilizzando che $a(\varphi + \varphi') = a(\varphi)a(\varphi')$ otteniamo $a(\varphi) = 1$. La matrice $M(\varphi)$ è data da

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & b(\varphi) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e la legge di gruppo impone

$$b(\varphi + \varphi') = b(\varphi) + b(\varphi')$$

da cui

$$b(\varphi) = \alpha\varphi$$

e, poiché la funzione lineare $b(\varphi) = \alpha\varphi$ è biettiva, il gruppo (G, \cdot) è parametrizzato da $\varphi \in \mathbb{R}$. Otteniamo

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha\varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il gruppo (G, \cdot) è quindi isomorfo a $(\mathbb{R}, +)$.

⁴Per lo stesso motivo del caso 1.

Principio di casualità

Applicando il **principio di casualità** si restringe ulteriormente l'insieme dei gruppi compatibili con gli assiomi posti. Il gruppo delle rotazioni spazio-temporali e quello di Carroll non soddisfano questo principio.

- *Gruppo di Lorentz*: abbiamo $t' = \cosh(\eta)t - \sinh(\eta)x$ e quindi

$$\Delta t' = \cosh(\eta)\Delta t - \sinh(\eta)\Delta x = \cosh(\eta)\Delta t \left(1 - \tanh(\eta)\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$$

e la causalità è rispettata se $1 - \tanh(\eta)\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq 0$.

- *Gruppo delle rotazioni spazio-temporali*: abbiamo $t' = \cos(2\pi r)t - \sin(2\pi r)x$ e quindi

$$\Delta t' = \cos(2\pi r)\Delta t - \sin(2\pi r)\Delta x = \Delta t \left(\cos(2\pi r) - \sin(2\pi r)\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$$

il principio di casualità è violato, infatti per ogni coppia di eventi se $r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ abbiamo $\Delta t' = -\Delta t$. Quindi questo gruppo va abbandonato.

- *Gruppo di Galileo*: abbiamo $t' = t$ e quindi $\Delta t' = \Delta t$, il principio di casualità è trivialmente soddisfatto.
- *Gruppo di Carroll*: abbiamo $t' = t + \alpha\varphi x$ e quindi

$$\Delta t' = \Delta t + \alpha\varphi\Delta x = \Delta t \left(1 + \alpha\varphi\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$$

il principio di casualità è violato, infatti per ogni coppia di eventi esiste un $\varphi \in \mathbb{R}$ per il quale $1 + \alpha\varphi\frac{\Delta x}{\Delta t} < 0$. Quindi questo gruppo va abbandonato.

In sintesi abbiamo due possibili gruppi:

- il gruppo di Galileo;
- il gruppo di Lorentz, se $1 - \tanh(\eta)\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq 0$.

Nelle prossime sezioni analizziamo questi due gruppi, integrando alcune considerazioni fisiche, ad esempio la condizione di casualità sul gruppo di Lorentz è priva di significato fisico se x ha le dimensioni di una lunghezza e t quella di un intervallo di tempo.

5 Il gruppo di Galileo

La matrice di una trasformazione di Galileo è data da

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha\varphi & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicata a (t, x) fornisce (t', x') come segue

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x + \alpha\varphi t \end{cases}$$

se $\varphi \in \mathbb{R}$ è un numero adimensionale, allora α deve avere le dimensioni di una velocità, sceglieremo $\alpha = -1 \text{ m/s}$ (poiché $\varphi \in \mathbb{R}$ allora $\alpha\varphi$ copre tutti i possibili valori di una velocità). Scriveremo

$$\alpha\varphi = -u.$$

La **trasformazione di Galileo** è quindi

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - ut \end{cases}$$

e la matrice è

$$M(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & 1 \end{pmatrix}.$$

il significato fisico di u è semplicemente la velocità di traslazione del sistema di riferimento \mathcal{R}' rispetto a \mathcal{R} . Infatti un punto materiale immobile all'origine di \mathcal{R}' ha come equazione $x = ut$. Infine notiamo che si ottiene la legge di composizione delle velocità

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{d(x - ut)}{dt} \quad \Rightarrow \quad v' = v - u.$$

6 Il gruppo di Lorentz

La matrice di una trasformazione di Lorentz è data da

$$M(\eta) = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & -\sinh(\eta) \\ -\sinh(\eta) & \cosh(\eta) \end{pmatrix}.$$

Per una questione di dimensionalità consideriamo la trasformazione $(ct, x) \rightarrow (ct', x')$ dove c è una costante positiva della dimensione di una velocità. Otteniamo

$$\begin{cases} ct' = \cosh(\eta)(ct) - \sinh(\eta)x \\ x' = -\sinh(\eta)(ct) + \cosh(\eta)x \end{cases}$$

e $\eta \in \mathbb{R}$ è un numero adimensionale. Poniamo allora $\tanh(\eta) = \frac{u}{c} \equiv \beta$, dove u è una costante positiva della dimensione di una velocità. Il significato fisico di u è semplicemente la velocità di traslazione del sistema di riferimento \mathcal{R}' rispetto a \mathcal{R} se si sceglie $b = c$. Infatti un punto materiale immobile all'origine di \mathcal{R}' ha allora come equazione $x = ut$.

Osserviamo che

$$-1 < \tanh(\eta) = \frac{u}{c} < 1 \quad \text{quindi} \quad |u| < c.$$

Infine la condizione di causalità

$$1 - \tanh(\eta) \frac{1}{c} \frac{\Delta x}{\Delta t} \geq 0$$

deve valere per ogni elemento del gruppo, ossia per ogni η . Ciò implica

$$\left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| \leq c.$$

Vediamo quindi che **la grandezza c è una costante strutturale dello spazio-tempo**, che pone un limite superiore alla velocità, sia essa la velocità di un sistema di riferimento sia di un'interazione all'origine di una relazione causale.

Introducendo il fattore γ di Lorentz

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \cosh \eta$$

e quindi $\sinh \eta = \beta\gamma$, ricaviamo la forma classica della **trasformazione di Lorentz**:

$$\begin{cases} ct' = \gamma(-\beta x + ct) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \end{cases}$$

o in forma matriciale

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

Infine notiamo che si ottiene la legge di composizione delle velocità

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \left(\frac{dt'}{dt} \right)^{-1} \quad \text{da cui} \quad v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u}{c^2}v}.$$

7 Conclusione

Abbiamo visto come il principio di relatività impone una struttura di gruppo sull'insieme delle trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali. Imponendo le proprietà di omogeneità dello spazio-tempo come pure l'isotropia dello spazio abbiamo derivato 4 possibili gruppi, due dei quali vanno scartati poiché incompatibili con il principio di causalità. Si ottengono così due gruppi additivi isomorfi a $(\mathbb{R}, +)$: il gruppo di Galileo e il gruppo di Lorentz. Analizzando il gruppo di Lorentz abbiamo ottenuto l'esistenza di una grandezza, dalle dimensioni di una velocità e notata c , intrinseca alla struttura dello spazio-tempo. Nella dinamica relativistica si dimostra che c è la velocità limite (asintotica) di una particella di massa non nulla e che una particella ha velocità c se e solo se la sua massa è nulla, inoltre in tal caso la velocità è c rispetto a tutti i sistemi di riferimento inerziali. Il valore sperimentale è $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s. L'esistenza di particelle di massa nulla non è necessaria nell'approccio proposto, c è infatti unicamente una costante strutturale dello spazio-tempo.

Va notato che, a differenza dell'approccio classico basato sull'invarianza della velocità della luce (vedi ad esempio [4]), nessun riferimento ad essa è fatta in questo metodo; l'esistenza dei fotoni, "particelle di luce" di massa nulla e quindi velocità pari a c , sui quali è stata dimostrata l'invarianza, non è quindi fondamentale nel approccio proposto.

8 Esercizi

1. Considerando le trasformazioni di Galileo, dimostra che gli intervalli di tempo e la distanza tra due eventi simultanei sono degli invarianti, ossia assumono lo stesso valore rispetto a tutti i sistemi di riferimento inerziali.
2. Considerando le trasformazioni di Galileo, ed utilizzando che la forza non dipende dal sistema di riferimento inerziale, dimostra che la seconda legge di Newton ha la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali: si dice che il gruppo di Galileo è il gruppo d'invarianza della meccanica newtoniana.
3. Considerando le trasformazioni di Lorentz, dimostra che vi sono due invarianti: la costante strutturale dello spazio-tempo c e l'intervallo spazio-temporale Δs^2 definito da

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 .$$

4. Considerando le trasformazioni di Lorentz, verifica se due eventi simultanei in \mathcal{R} lo sono pure in \mathcal{R}' .
5. Considera due eventi che accadono nello stesso luogo rispetto a \mathcal{R}' , in moto rispetto a \mathcal{R} con velocità u . Verifica che

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \quad \text{formula di dilatazione del tempo .}$$

Cosa puoi dire se gli eventi accadono nello stesso luogo rispetto a \mathcal{R} ?

Riferimenti bibliografici

- [1] J.-M. Lévy-Leblond, *One more derivation of the Lorentz transformation*, Am. J. Phys. **44**, 271–277 (1976)
- [2] J.-M. Lévy-Leblond, *Les relativités*, Cahiers de Fontenay n°8, E.N.S. de Fontenay-aux-roses (1977)
- [3] J.-M. Lévy-Leblond, J.-P. Provost, *Additivity, rapidity, relativity*, Am. J. Phys. **47**, 1045–1049 (1979)
- [4] C. Ferrari, *Fisica*, Note corso FAM, Liceo di Locarno (2010)